Messung von Zinsrisiken mit dem Value at Risk-Konzept (2)

Prof. Dr. Arnd Wiedemann, Universität Siegen

erschienen in: WISU 12/2002, S. 1548-1553

Teil (1) des Beitrags beschäftigte sich mit der Berechnung des Value at Risk von einzelnen Wertpapieren und endete mit der Ermittlung des undiversifizierten Value at Risk für Portefeuilles. Im Mittelpunkt von Teil (2) sollen nun Risikoverbundeffekte stehen. Gezeigt werden soll, welche Verbesserungen beim Value at Risk zu erzielen sind, wenn die Risikofaktoren nicht vollständig positiv miteinander korreliert sind.

III. Value at Risk mit Diversifikationseffekten

1. Risikodiversifikationseffekte und TriRisk

Innerhalb einer Zinsposition ergeben sich Diversifikationseffekte immer dann, wenn die portefeuillerelevanten Zerobond-Abzinsfaktoren nicht vollständig positiv miteinander korreliert sind. Die Korrelation zwischen zwei Zerobond-Abzinsfaktoren misst, inwieweit sich die Wertveränderung eines Zerobond-Abzinsfaktors auf den Wert des anderen Zerobond-Abzinsfaktors auswirkt. Da die Wertveränderungen der Zerobond-Abzinsfaktoren die Barwertveränderungen der Cash Flows einer Zinsposition determinieren, zeigt die Korrelation damit, wie stark das Gesamtrisiko durch Mischung von Cash Flows unterschiedlicher Laufzeitbänder reduziert werden kann.

Die Korrelation lässt sich durch den <u>Korrelationskoeffizienten (k)</u> zum Ausdruck bringen, der Werte zwischen –1 und +1 annehmen kann.

Ein <u>Korrelationskoeffizient von +1</u> bedeutet, dass die Wertveränderungen vollständig positiv miteinander korreliert sind. Zwei Positionen (Cash Flows), deren zugehörige Zerobond-Abzinsfaktoren einen Korrelationskoeffizienten von + 1 aufweisen, haben ein identisches Wertveränderungsverhalten. In diesem Fall existieren keine Diversifikationseffekte.

Ein <u>Korrelationskoeffizient von 0</u> bedeutet, dass die Wertveränderungen zweier Positionen unabhängig voneinander sind. Folglich ist eine Risikoreduktion durch Diversifikation möglich.

Ein <u>Korrelationskoeffizient von –1</u> bedeutet vollständig negative Korrelation. Die Wertveränderung einer Position bewegt sich immer in entgegengesetzter Richtung zur Wertveränderung der anderen Position. Es ergeben sich maximale Diversifikationseffekte.

ccfb – Prof. Dr. Wiedemann Consulting GmbH & Co. KG | Postfach 10 01 31 | 57001 Siegen
Tel. 0271 / 238 54 33-0 | Fax 0271 / 238 5433-9 | info@ccfb.de | www.ccfb.de

Wenn die Barwertveränderungen aller zum Portefeuille gehörenden Basisinstrumente normalverteilt sind, ist auch die Portefeuille-Barwertveränderung als Summe aller Barwertveränderungen der Basisinstrumente normalverteilt. Einzelne eindimensionale Verteilungen werden zu einer mehrdimensionalen Normalverteilung zusammengesetzt. In diesem Fall wird zur Berechnung der Portefeuille-Volatilität (σ_P) neben der Standardabweichung jedes einzelnen Risikofaktors ein zusätzlicher Parameter für mehrdimensionale Verteilungen benötigt, die Kovarianz. Die Kovarianz ergibt sich aus der Multiplikation der Volatilitäten der einzelnen Zerobond-Abzinsfaktoren (Risikofaktoren) und des Korrelationskoeffizienten, der die Abhängigkeit zwischen den Wertschwankungen der Zerobond-Abzinsfaktoren zum Ausdruck bringt.

Da die Wertveränderungen der Basisinstrumente in einem linearen Zusammenhang zu den Wertveränderungen der Risikofaktoren stehen, kann die Portefeuille-Volatilität mithilfe einer standardisierten statistischen Methode berechnet werden. Die Formel zur Berechnung der Portefeuille-Volatilität berücksichtigt durch Einbeziehung des Korrelationskoeffizienten die Diversifikationseffekte zwischen den einzelnen Risikofaktoren (vgl. Abbildung 12).

ccfb – Prof. Dr. Wiedemann Consulting GmbH & Co. KG | Postfach 10 01 31 | 57001 Siegen
Tel. 0271 / 238 54 33-0 | Fax 0271 / 238 5433-9 | info@ccfb.de | www.ccfb.de

Portefeuille-Volatilität (σ_p):

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \bullet \sigma_i^2 + 2 \bullet \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<1}^{n} \bullet x_i \bullet x_j \bullet cov_{ij}}$$

$$cov_{ij} = \sigma_i \bullet \sigma_j \bullet k_{ij}$$

Kovarianz

Portefeuille-Volatilität (σ_p) für zwei Wertpapiere

$$\sigma_P = \sqrt{x_1^2 \bullet \sigma_1^2 + x_2^2 \bullet \sigma_2^2 + 2 \bullet x_1 \bullet x_2 \bullet \sigma_1 \bullet \sigma_2 \bullet k_{1,2}}$$

Mit ihrem Portefeuilleanteil (x_1) gewichtete Volatilität (σ_1) von Wertpapier 1

Mit ihrem Portefeuilleanteil (x_2) gewichtete Volatilität (σ_2) von Wertpapier 2

Erfassung des Risikoverbundes zwischen den Wertpapieren über den Korrelationskoeffizienten

Abbildung 12: Formel zur Berechnung der Portefeuille-Volatilität

Unter dem Portefeuille-Anteil x_i ist im Sinne der VaR-Berechnung für Zinstitel der Barwert einer Zinsposition im Portefeuille zu verstehen. In Fortsetzung des Beispiels aus Teil (1) (vgl. Abbildung 11) entspricht x_1 dem Barwert der 1-jährigen Nullkuponanleihe und x_2 dem Barwert der 2-jährigen Nullkuponanleihe. Der Korrelationskoeffizient zwischen dem 1-jährigen Zerobond-Abzinsfaktor und dem 2-jährigen Zerobond-Abzinsfaktor möge 0,8 betragen. Somit ergibt sich eine Portefeuille-Volatilität von 110,18 EUR. Der Portefeuille-VaR bei der gewünschten Aussagesicherheit von 95% und unter Berücksichtigung der Diversifikationseffekte beträgt 181,80 EUR (vgl. Abbildung 13).

ccfb – Prof. Dr. Wiedemann Consulting GmbH & Co. KG | Postfach 10 01 31 | 57001 Siegen
Tel. 0271 / 238 54 33-0 | Fax 0271 / 238 5433-9 | info@ccfb.de | www.ccfb.de

Berechnung der Portefeuille-Volatilität

$$\sigma_P = \sqrt{\begin{array}{l}10.000^2 \bullet 0{,}5\%^2 + 9.431{,}10^2 \bullet 0{,}7\%^2 + \\ 2 \bullet 10.000 \bullet 9.431{,}10 \bullet 0{,}7\% \bullet 0{,}5\% \bullet 0{,}8\end{array}} = \boxed{110{,}18 \text{ EUR}}$$

Portefeuille-Value at Risk bei einem Konfidenzniveau von 95 %

$$\text{VaR} = z \bullet \sigma_p = 1{,}65 \bullet 110{,}18 = \boxed{181{,}80 \text{ EUR}}$$

Diversifikationseffekt: $\frac{181{,}80 - 191{,}43}{191{,}43} = -5{,}03\,\%$

Abbildung 13: Berechnung des VaR mit Diversifikationseffekten

Durch die Berücksichtigung der Diversifikationseffekte im Portefeuille lässt sich der Portefeuille-VaR um 5,03% reduzieren. Der Korrelationskoeffizient von 0,8 bedeutet, dass einer der beiden Zerobond-Abzinsfaktoren jedes Mal nur 80% der Wertveränderung des anderen Zerobond-Abzinsfaktors mitmacht. Da aufgrund der Laufzeiteffekte die längeren Zerobond-Abzinsfaktoren stärkere Wertschwankungen als die kürzeren Zerobond-Abzinsfaktoren aufweisen, schlägt sich eine Wertveränderung des 2-jährigen Zerobond-Abzinsfaktors nur zu 80% als Wertveränderung beim 1-jährigen Zerobond-Abzinsfaktor nieder. Ein Korrelationskoeffizient kleiner als 0,8 hätte einen noch geringeren Risikoverbund und somit eine noch stärkere Risikodiversifikation zur Folge. Bei einem Korrelationskoeffizienten von 0,5 ergibt sich beispielsweise ein VaR von 166,30 EUR. Folglich wird ein Risikodiversifikationseffekt von 13,13% erzielt.

Alternativ lässt sich die VaR-Berechnung für Portefeuilles auch so durchführen, dass die Volatilitäten der Risikofaktoren bereits vor dem Einsetzen in die Formel aus Abbildung 12 gemäß der gewünschten Aussagesicherheit skaliert werden. Das Ergebnis der Addition aller Komponenten unter dem Wurzel ist dann nicht mehr die Portefeuille-Volatilität, sondern direkt der VaR. Im Fall eines Portefeuilles, das nur aus zwei Laufzeitbändern

ccfb – Prof. Dr. Wiedemann Consulting GmbH & Co. KG | Postfach 10 01 31 | 57001 Siegen
Tel. 0271 / 238 54 33-0 | Fax 0271 / 238 5433-9 | info@ccfb.de | www.ccfb.de

besteht, ergibt sich in Analogie zur Berechnung der Portefeuille-Volatilität die in Abbildung 14 erläuterte Formel für den Portefeuille-VaR.

Portefeuille-Value at Risk

$$\mathrm{VaR}_P = \sqrt{\mathrm{VaR}_1^2 + \mathrm{VaR}_2^2 + 2 \bullet \mathrm{VaR}_1 \bullet \mathrm{VaR}_2 \bullet k_{1,2}}$$

Erfassung des Risikoverbundes zwischen den Laufzeitbändern 1 und 2 über den Korrelationskoeffizienten $k_{1,2}$

Value at Risk im Laufzeitband

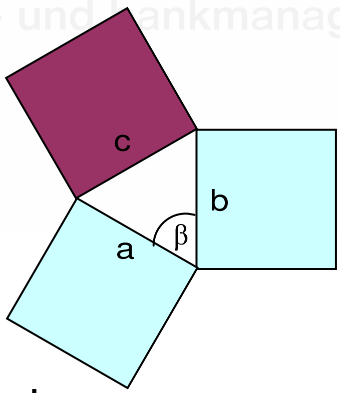
Value at Risk im Laufzeitband

Abbildung 14: Portefeuille-VaR

Die Wirkung des Korrelationskoeffizienten auf die Risikodiversifikation kann mithilfe des TriRisk-Konzeptes sehr anschaulich dargestellt werden (vgl. Schulte-Mattler/ Tysiak 1999). Bei der Betrachtung des Satzes von Pythagoras lässt sich eine Ähnlichkeit mit der soeben vorgestellten Formel zur Berechnung des Portefeuille-VaR feststellen (vgl. Abbildung 15).

Satz von Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \bullet a \bullet b \bullet \cos\beta$$



Portefeuille-VaR

$$\mathrm{VaR}_P^2 = \mathrm{VaR}_1^2 + \mathrm{VaR}_2^2 + 2 \bullet \mathrm{VaR}_1 \bullet \mathrm{VaR}_2 \bullet k_{1,2}$$

$$k_{1,2} = -\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos(-k_{1,2})$$

Abbildung 15: TriRisk-Konzept

Grafisch lässt sich die Formel zur Berechnung des Portefeuille-VaR wie folgt interpretieren: Die Längen der Katheten bilden die Einzel-VaR (VaR in den einzelnen Laufzeitbändern) ab und die Länge der Hypotenuse stellt den Portefeuille-VaR dar. Der Korrelationskoeffizient zwischen den Einzel-VaR der Nullkuponanleihen kann in den Winkel zwischen den zwei Katheten des pythagoreischen Dreiecks umgerechnet werden. Für den Korrelationskoeffizienten von 0,8 beträgt der Winkel β 143,13°. Mithilfe eines Dreiecks lässt sich der Portefeuille-VaR als Ergebnis der Zusammenlegung der zwei Einzel-VaR unter Berücksichtigung der Risikodiversifikationseffekte veranschaulichen (vgl. Abbildung 16). Dabei wird der Diversifikationseffekt durch den Korrelationskoeffizienten und der wiederum durch den Winkel β abgebildet.

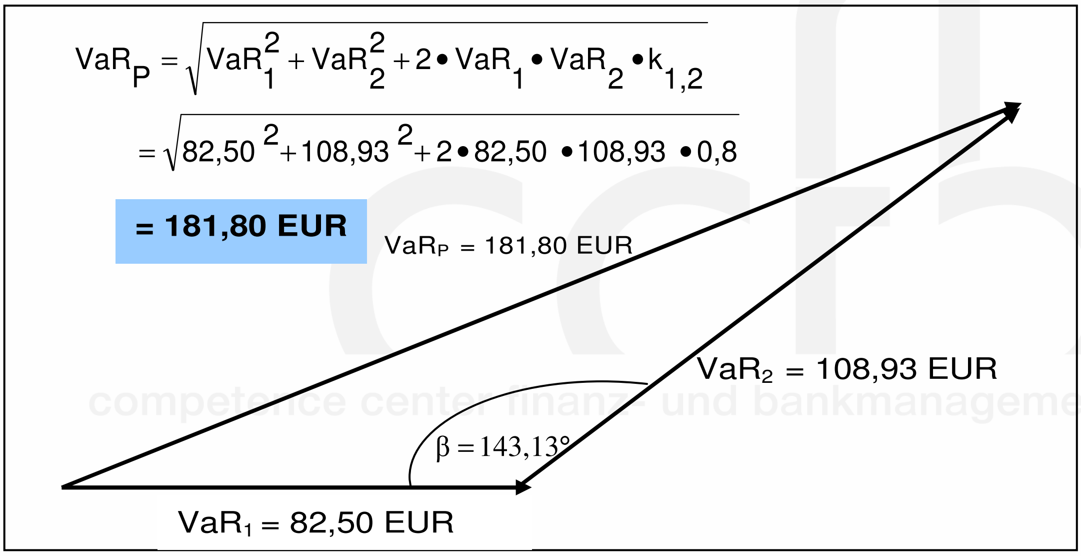


Abbildung 16: Veranschaulichung des diversifizierten VaR mithilfe von TriRisk

Die Wirkung verschiedener Risikoverbundeffekte lässt sich mit dem TriRisk-Konzept grafisch leicht nachvollziehen. Die Verringerung des Korrelationskoeffizienten hat einen kleineren Winkel zwischen den Einzel-VaR zur Folge. Damit wird der Abstand zwischen den Einzel-VaR und somit auch der Portefeuille-VaR kleiner. Bei einer vollständig negativen Korrelation (Korrelationskoeffizient von –1) liegen die Einzel-VaR genau übereinander, so dass der Portefeuille-VaR den geringst möglichen Wert aufweist. In Abbildung 17 wird die Wirkung eines Korrelationskoeffizienten von 0,5 gegenüber dem ursprünglichen Wert von 0,8 veranschaulicht.

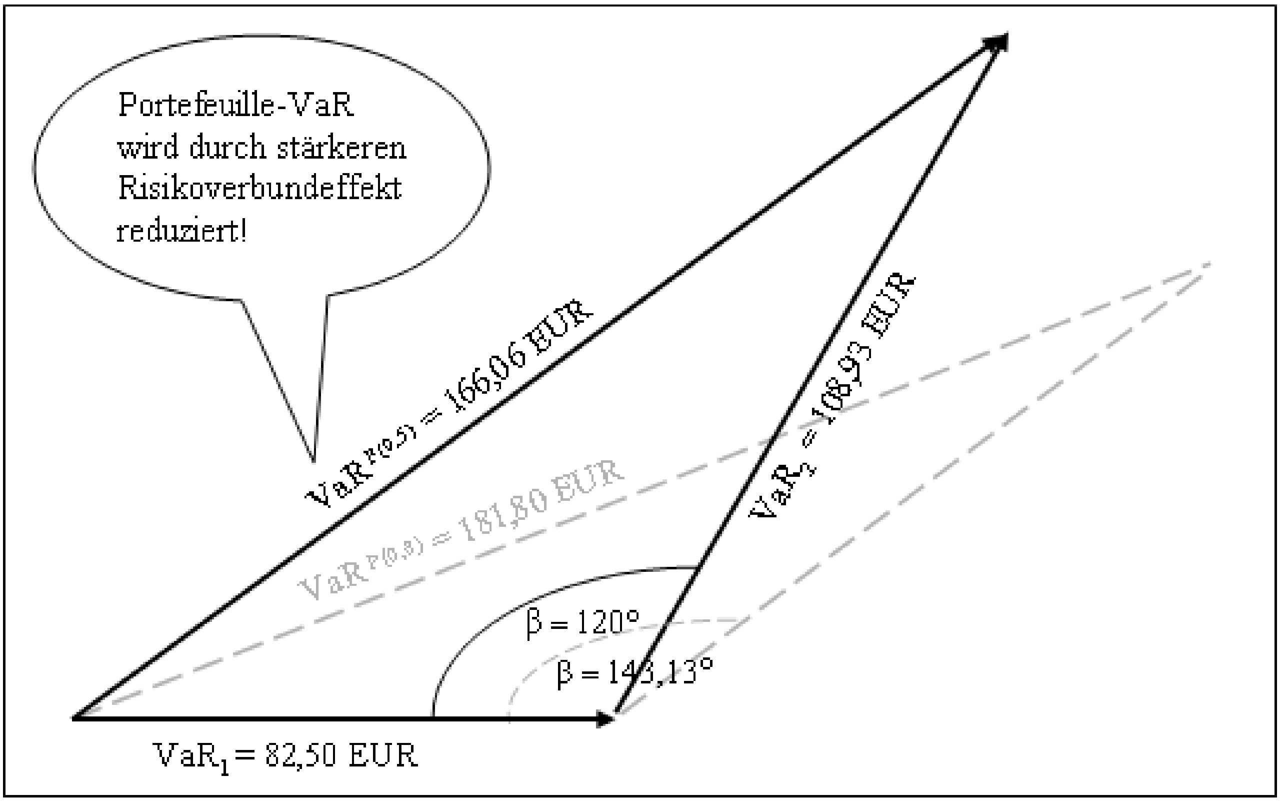


Abbildung 17: Visualisierung des Portefeuille-VaR bei k = 0,5

2. Berechnung des Value at Risk für komplexe Portefeuilles

Die bereits vorgestellte allgemeine Formel zur Berechnung der Portefeuille-Volatilität konnte im Fall von nur zwei Risikofaktoren zu einer Gleichung vereinfacht werden, die dem Anwender eine übersichtliche Darstellung aller Komponenten bietet (vgl. Abbildung 12). Die Notwendigkeit einer verschachtelten Summenbildung wird dadurch vermieden. Sofern Portefeuilles aber mehr als zwei Laufzeitbänder aufweisen, wird die VaR-Berechnung durch die Berücksichtigung mehrerer Kovarianzen erheblich komplexer. Hier hilft die Matrixdarstellung, die Übersichtlichkeit zu behalten (vgl. Abbildung 18).

Portefeuille-Volatilität

$$\sigma_P = \sqrt{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bullet \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov_{1,2} & \cdots & cov_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cov_{n,1} & cov_{n,2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Vektor mit Barwerten ($\mathbf{x}'$) in einzelnen Laufzeitbändern

Transponente des Barwert-Vektors ($\mathbf{x}$)

Kovarianz-Matrix ($\mathbf{cov}$) erfasst die Risikoverbundeffekte

Portefeuille-Value at Risk

$$\mathbf{VaR_P} = (\mathbf{x}' \bullet \mathbf{cov} \bullet \mathbf{x}) \bullet \mathbf{z}$$

Abbildung 18: Formel zur Berechnung des diversifizierten VaR in Matrixdarstellung

Die Kovarianz-Matrix (cov) fasst die Volatilitäten und Kovarianzen der Zerobond-Abzinsfaktoren zusammen. Alle hier notwendigen Informationen (Volatilitäten und Kovarianzen) können wie auch die übrigen Marktdaten von externen Anbietern abgerufen werden, so dass sich die VaR-Berechnungen erheblich vereinfachen lässt.

ccfb – Prof. Dr. Wiedemann Consulting GmbH & Co. KG | Postfach 10 01 31 | 57001 Siegen
Tel. 0271 / 238 54 33-0 | Fax 0271 / 238 5433-9 | info@ccfb.de | www.ccfb.de

Die Verwendung der Kovarianz-Matrix für die VaR-Berechnung verdeutlicht Abbildung 19 anhand des bereits vorgestellten Beispiel-Portefeuilles mit den zwei bekannten Anleihen. Die Beispielrechnung zeigt die Ableitung der Kovarianz aus den Volatilitäten und dem gemeinsamen Korrelationskoeffizienten und anschließend die VaR-Berechnung mithilfe der Kovarianz-Matrix.

$$\mathrm{cov}_{1,2} = \sigma_1 \bullet \sigma_2 \bullet k_{1,2} = 0{,}7\,\% \bullet 0{,}5\,\% \bullet 0{,}8 = \mathbf{0{,}000028}$$

$$\sigma_P = \sqrt{(10.000;9.431{,}10) \bullet \begin{pmatrix} 0{,}000025 & 0{,}000028 \\ 0{,}000028 & 0{,}000049 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 10.000{,}00 \\ 9.431{,}10 \end{pmatrix}}$$

0,50 %² **0,70 %²**

$$\mathrm{VaR}_P = 110{,}18 \bullet 1{,}65 = \mathbf{181{,}80\ EUR}$$

Abbildung 19: VaR-Berechnung mithilfe der Kovarianz-Matrix für zwei Anleihen

Abschließend sei eine Beispielrechnung für ein Portefeuille durchgeführt, das aus drei Laufzeitbändern besteht. Hierzu wird das bisher verwendete Portefeuille mit den zwei Anleihen noch um eine 3-jährige Kuponanleihe erweitert. Die Kuponanleihe möge einen Nominalzins von 6% haben und am Ende der Laufzeit zum Nominalwert von 10.000 EUR getilgt werden. Die Zinszahlungen erfolgen jährlich. Die Anleihe generiert demnach im ersten und zweiten Jahr einen Zinsertrag von 600 EUR sowie im dritten Jahr einen nochmaligen Zinsertrag von 600 EUR plus die Kapitalrückzahlung von 10.000 EUR.

Der VaR wird beispielhaft für ein Konfidenzniveau von 95% und eine Haltedauer von 20 Tagen (1 Monat) bestimmt. Alle relevanten Marktdaten und die Berechnung des undiversifizierten VaR werden in Abbildung 20 dargestellt.

ccfb – Prof. Dr. Wiedemann Consulting GmbH & Co. KG | Postfach 10 01 31 | 57001 Siegen
Tel. 0271 / 238 54 33-0 | Fax 0271 / 238 5433-9 | info@ccfb.de | www.ccfb.de

Laufzeit	1	2	3		1-J	2-J	3-J
Zins	5,00 %	5,50 %	5,70 %	1-J-ZB-	1	0,8	0,6
ZB-AF	0,9524	0,8982	0,8463	2-J-ZB-	0,8	1	0,7
20-Tage-Volatilität	0,50 %	0,70 %	0,85 %	3-J-ZB-	0,6	0,7	1

Laufzeit -band	1-J Nullkuponanleihe	5%-Anleihe mit 2 J RLZ	6%-Anleihe mit 3 J RLZ	Cash-Flow-Barwerte	Volatili	Undiversifizierter VaR $_{95\,\%}$
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)=[(1)+(2)+(3)]• ZB-AF(0,LZ)	(5)	(6)=(5)•(4)• 1,65
1	10.000	500	600	10.571,64	0,50 %	87,22
2		10.000	600	9.520,92	0,70 %	109,97
3			10.600	8.970,78	0,85 %	125,82
						323,01

Abbildung 20: Undiversifizierter VaR für das Beispiel-Portefeuille mit 3 Anleihen

In Abbildung 21 ist abschließend die Berechnung des diversifizierten VaR mithilfe der Kovarianz-Matrix und der daraus resultierende Diversifikationseffekt dargestellt.

	1-J	2-J	3-J
1-J-ZB-AF	σ_1^2	$cov_{1,2}$	$cov_{1,3}$
2-J-ZB-AF	$cov_{2,1}$	σ_2^2	$cov_{2,3}$
3-J-ZB-AF	$cov_{3,1}$	$cov_{3,2}$	σ_3^2

$$cov_{1,2} = cov_{2,1} = \sigma_1 \bullet k_{1,2} \bullet \sigma_2 = 0{,}5\% \bullet 0{,}8 \bullet 0{,}7\% = 28 \bullet 10^{-4}$$

$$cov_{1,3} = cov_{3,1} = \sigma_1 \bullet k_{1,3} \bullet \sigma_3 = 0{,}5\% \bullet 0{,}6 \bullet 0{,}85\% = 25{,}5 \bullet 10^{-4}$$

$$cov_{2,3} = cov_{3,2} = \sigma_2 \bullet k_{2,3} \bullet \sigma_3 = 0{,}7\% \bullet 0{,}7 \bullet 0{,}85\% = 41{,}65 \bullet 10^{-4}$$

$$\sigma_1^2 = 0{,}5\%^2 = 25 \bullet 10^{-4}; \sigma_2^2 = 0{,}7\%^2 = 49 \bullet 10^{-4}; \sigma_3^2 = 0{,}85\%^2 = 72{,}25 \bullet 10^{-4}$$

$$\sigma_P = \sqrt{x' \bullet \begin{pmatrix} 25 \bullet 10^{-4} & 28 \bullet 10^{-4} & 25{,}5 \bullet 10^{-4} \\ 28 \bullet 10^{-4} & 49 \bullet 10^{-4} & 41{,}65 \bullet 10^{-4} \\ 25{,}5 \bullet 10^{-4} & 41{,}65 \bullet 10^{-4} & 72{,}25 \bullet 10^{-4} \end{pmatrix} \bullet x}$$

$$x' = (10.571{,}64;\ 3.520{,}92;\ 8.970{,}78) \qquad x = \begin{pmatrix} 10.571{,}64 \\ 9.520{,}92 \\ 8.970{,}78 \end{pmatrix}$$

$$VaR_{35\,\%} = \sqrt{x' \bullet cov \bullet x} \bullet z = 175{,}04 \bullet 1{,}65 = \textbf{288,81 EUR}$$

Diversifikationseffekt: $\frac{288{,}81 - 323{,}01}{323{,}01} =$ **-10,59 %**

Abbildung 21: Diversifizierter VaR für das Beispiel-Portefeuille mit 3 Anleihen

ccfb – Prof. Dr. Wiedemann Consulting GmbH & Co. KG | Postfach 10 01 31 | 57001 Siegen
Tel. 0271 / 238 54 33-0 | Fax 0271 / 238 5433-9 | info@ccfb.de | www.ccfb.de

Der diversifizierte VaR ist die zentrale Steuerungsgröße für das barwertige Zinsrisiko auf Gesamtbankebene (vgl. Wiedemann 2004). Mit dem Value at Risk-Ansatz werden Risikoverbundeffekte zwischen einzelnen Risikofaktoren in einem Portefeuille berücksichtigt. Somit wird es möglich, das gesamte Zinsrisiko einer Bank in einer einzigen Kennzahl zu erfassen. Das schafft Risikotransparenz und ist die Voraussetzung für wirkungsvolle Maßnahmen zur Risikovermeidung resp. Risikoübernahme. Das statistische Fundament des Value at Risk ermöglicht dabei eine Risikoeinschätzung, die frei ist von subjektiven Annahmen über die zukünftige Entwicklung der relevanten Risikofaktoren und führt so zu einer breiten Akzeptanz sowohl für die interne Risikomessung als auch für die externe Risikomessung im Rahmen der aufsichtsrechtlichen Eigenmittelunterlegung (vgl. Schierenbeck 2001).

Literaturempfehlungen:

Schierenbeck, H.: Ertragsorientiertes Bankmanagement, Band 2: Risiko-Controlling und integrierte Rendite-/ Risikosteuerung, 7. Aufl., Wiesbaden 2001.

Schulte-Mattler H., Tysiak W.: TriRisk, in: Die Bank 02/1999, S. 84-88.

Wiedemann, A.: Die Risikotriade - Zins-, Kredit- und Operationelles Risiko, Frankfurt am Main 2004.

ccfb – Prof. Dr. Wiedemann Consulting GmbH & Co. KG | Postfach 10 01 31 | 57001 Siegen
Tel. 0271 / 238 54 33-0 | Fax 0271 / 238 5433-9 | info@ccfb.de | www.ccfb.de