

Von den Sensitivitätsverfahren zu statistischen Modellen

ccfb consulting

1	Sensitivitätsverfahren als Risikomaß	1
2	Die Durationsanalyse als Basis der Sensitivitätsverfahren.....	4
3	Modified Duration und Convexity	11
4	Management komplexer Zinsstrukturkurvenrisiken.....	17
5	Relevanz der Durationskonzepte für die Gesamtbanksteuerung.....	23
6	Statistische Verfahren	25
7	Historische Simulation.....	28

1 Sensitivitätsverfahren als Risikomaß

Jede kaufmännische Tätigkeit bewegt sich im Spannungsfeld zwischen Ertragsoptimierung und Risikoverminderung. Unter dem Begriff „Risiko“ wird die negative Abweichung einer tatsächlichen Größe von ihrem Erwartungswert verstanden. Dabei ist zu unterscheiden zwischen Risiken, die in direkter oder indirekter Abhängigkeit von der Bonität des jeweiligen Kontraktpartners stehen und solchen, die hiervon unabhängig sind.

Bonitätsunabhängige Risiken zeichnen sich vor allem dadurch aus, dass sie durch äußere Umstände bestimmt werden, die von einer Bank nicht oder nur sehr begrenzt beeinflussbar sind. Ein Großteil dieser Risiken kann unter dem Oberbegriff der *Marktpreisrisiken* zusammengefasst werden (SCHIERENBECK 2003, S. 5). Marktpreisrisiken treten ganz allgemein immer dann auf, wenn der Wert einer gehandelten Ware oder eines gehandelten Rechts von Marktschwankungen abhängig ist, auf die der Eigentümer der Ware oder der Inhaber des Rechts keinen Einfluss hat. Mit anderen Worten besteht das Risiko in diesen Fällen darin, dass der

Eigentümer der Ware oder des Rechts diese nur zu den vom Markt vorgegebenen Preisen verwerten kann. Je länger die Ware im Bestand gehalten wird und je stärker sich die Marktpreisschwankungen bemerkbar machen können, desto größer ist das Risiko. Ziel eines Investors ist es, die Auswirkungen potenzieller Marktpreisänderungen auf den Wert seines Investments im Vorfeld abzuschätzen.

Methodisch stehen zur Risikoanalyse die Ansätze einer vollständigen Neubewertung des Investments und die Risikoanalyse mit Hilfe von Sensitivitätsverfahren zur Verfügung. Die Verfahren der Neubewertung ermitteln häufig den *Value at Risk*, der den mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eintretenden maximalen Verlust einer Vermögensposition beziffert. Bei diesem Verfahren werden die möglichen Schwankungen der Marktrisikofaktoren entweder auf der Grundlage historischer Datenreihen oder komplexer Simulationsverfahren entwickelt und mit einer statistischen Wahrscheinlichkeit belegt. Die negative Abweichung so ermittelter, alternativer Kurswerte vom erwarteten Kurswert stellt dann den größtmöglichen Verlust innerhalb der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit dar.

Im Gegensatz zur vollständigen Neubewertung simulieren Sensitivitätsverfahren keine konkreten Alternativszenarien. Vielmehr wird hier untersucht, wie stark der Wert eines Investments schwankt, wenn sich der betrachtete Marktrisikofaktor um eine Einheit ändert. Mit Hilfe von Sensitivitätsverfahren kann beispielsweise ermittelt werden, welches von zwei oder mehr Investments bei identischer Marktpreisänderung stärker oder schwächer reagiert. Je nach Risikohorizont und Markteinschätzung kann ein Investor mit ihrer Hilfe entscheiden, welches Investment für seine Zwecke besser oder schlechter geeignet ist.

Ein typisches Anwendungsfeld für Sensitivitätsverfahren ist die Analyse von Wertpapieren oder ganzen Wertpapierportfolien. Bei der Zusammenstellung dieser Portfolien zählen zu den traditionellen Auswahlkriterien die Bonität eines Emittenten, die Restlaufzeit, die Nominalverzinsung und die Rendite. Das Bonitätsrisiko sei im folgenden ausgeklammert. Damit besteht über die Höhe und den zeitlichen Anfall der Zins- und Tilgungszahlungen eines Wertpapiers Sicherheit. Sicherheit bei den Cashflows bedeutet aber nicht zwangsläufig auch Sicherheit beim Preis resp. Kurs. Sicher ist lediglich der Rückzahlungskurs. Ansonsten bestimmt

sich der tägliche Marktpreis an der Börse auf Grund des Gesetzes von Angebot und Nachfrage und den bewertungsrelevanten Marktzinssätzen. Neben den Kurswertschwankungen auf Grund von Marktveränderungen wirkt auch die Restlaufzeit auf das Risiko. Hinzu kommt, dass der zeitliche Anfall der aus dem Wertpapier in Zukunft generierten Zahlungen als auch die Höhe dieser Zahlungen das Risiko beeinflussen.

Im folgenden ist zu untersuchen, welche Faktoren auf die Kursermittlung eines Wertpapiers Einfluss nehmen. Grundsätzlich ergibt sich der Kurswert eines Wertpapiers, indem die Zins- und Kapitalrückflüsse an der aktuell gültigen *Zinsstrukturkurve* des Geld- und Kapitalmarktes gemessen werden. Der Preis eines Wertpapiers steigt umso höher, je höher die Erträge im Vergleich zu einer Anlage der Mittel am Geld- und Kapitalmarkt sind. Die Marktzinsen sind der dominierende Risikofaktor.

Den Ausgangspunkt der Analyse bildet der aktuelle *Barwert* oder Kurs eines Wertpapiers. Um diesen zu ermitteln, werden alle in der Zukunft generierten Zahlungen an der zum Bewertungszeitpunkt gültigen Zinsstrukturkurve gemessen, indem die bis zur Fälligkeit noch ausstehenden Zahlungen auf den Bewertungszeitpunkt diskontiert werden. Die Summe der diskontierten Zahlungen ergibt den Barwert des Wertpapiers zum Bewertungszeitpunkt. Je nach der Veränderung der Zinsstruktur kann sich der Barwert im Vergleich zum Kaufzeitpunkt erniedrigen oder erhöhen. Höhere Zinsen führen auf Grund der stärkeren Diskontierung der zukünftigen Zahlungen zu sinkenden Barwerten und umgekehrt. Das Risiko für festverzinsliche Wertpapiere besteht demnach darin, dass die Marktzinssätze im Vergleich zur Ausgangssituation steigen und dem Wertpapier dadurch ein niedrigerer Barwert beizulegen ist. Alternativ kann auch über den Endwert argumentiert werden.

Das Zinsrisiko ist dann derjenige Betrag, um den das am Ende der Planungsperiode realisierte Endvermögen von dem auf Basis des Kaufzeitpunkts erwarteten Endvermögens auf Grund von Marktzinsänderungen abweicht (SCHIERENBECK 2003, S. 381). Für die Ermittlung des Endwertes gilt folgender Zusammenhang:

$$EW = BW \cdot (1 + R)^n \Leftrightarrow BW = \frac{EW}{(1 + R)^n}$$

mit:	BW	=	Barwert
	EW	=	Endwert
	R	=	Rendite
	n	=	Restlaufzeit

Um die Auswirkungen zinsinduzierter Barwertrisiken quantifizieren zu können, bedient man sich im Risikomanagement der Hilfe von *Sensitivitätskennzahlen*, die eine Veränderung des aktuellen Wertes des Zinsinstruments anzeigen, wenn sich der relevante Marktrisikofaktor (hier die Marktzinsen) um eine Einheit verändert.

2 Die Durationsanalyse als Basis der Sensitivitätsverfahren

Um zwei oder mehr Wertpapiere miteinander vergleichen zu können, bedarf es eines einheitlichen Vergleichskriteriums. Die Restlaufzeit kommt auf Grund der genannten Unzulänglichkeiten als Gradmesser nicht in Betracht. Abhilfe schafft die Duration.

Die *Macaulay Duration* gibt die mittlere gewogene Fälligkeit sämtlicher Zahlungen aus einem Wertpapier an. Die Duration kann ausschließlich das Zinsrisiko eines Wertpapiers messen. Titelspezifische Risiken, wie die bereits angesprochenen Bonitätsrisiken oder Liquiditätsrisiken, werden von der Duration nicht erfasst. Ausgangspunkt der Berechnung der Duration bildet die Bestimmung des Barwertes eines Wertpapiers:

$$BW = \sum_{t=1}^n CF_t \cdot (1 + R)^{-t}$$

mit:	BW	=	Barwert
	t	=	Zeitindex
	CF	=	Cashflow
	R	=	Rendite
	n	=	Restlaufzeit

Eine typische Eigenschaft des Barwertes ist es, dass er die zu unterschiedlichen Zeitpunkten fälligen Zahlungen aus einem Wertpapier vergleichbar macht. Der Barwert ermittelt sich, indem die zu den unterschiedlichen Zeitpunkten anfallenden Zahlungen aus einem Wertpapier (Cashflows) mit Hilfe der Rendite des Wertpapiers auf den Betrachtungszeitpunkt diskontiert werden. Dieser stellt den Wert dar, den die Summe der zukünftig aus dem Wertpapier generierten Zahlungen heute besitzt.

Umgekehrt lässt sich sagen, dass der ermittelte Wert heute am Geld- und Kapitalmarkt mit entsprechender Fristigkeit angelegt werden könnte, um die zukünftigen Nominal-Cashflows zu erhalten. Damit wird auch deutlich, dass die Höhe des Barwertes unmittelbar von der jeweils gültigen Zinsstrukturkurve abhängig ist. Je stärker die einzelnen Nominal-Cashflows abgezinst werden, desto geringer wird der Barwert. Durch die höhere Verzinsung einer Anlage am Geld- und Kapitalmarkt reicht ein geringerer Betrag aus, um die zukünftigen Cashflows zu generieren.

Grundsätzlich existieren mehrere Berechnungsmethoden für die Barwertermittlung. An dieser Stelle sei zunächst auf zwei grundlegende Varianten verwiesen: die Ermittlung mit Hilfe laufzeitspezifischer Nullkuponzinsen und die Ermittlung mit Hilfe der „Yield to Maturity“. Abb. 1 erläutert die Barwertermittlung mit Hilfe laufzeitspezifischer Nullkuponzinsen.

Nullkuponzinsen unterscheiden sich von Kuponzinsen dadurch, dass lediglich eine einzige Zins- und Tilgungszahlung am Ende der Laufzeit ohne zwischenzeitliche Zahlungen anfällt. Zinseszinsseffekte, die bei Laufzeiten von über einem Jahr entstehen, müssen nicht mehr explizit bei der Barwertberechnung berücksichtigt wer-

den, sondern sind implizit in den Nullkuponzinsen enthalten. Für Laufzeiten von genau einem Jahr sind Kuponzins und Nullkuponzins identisch.

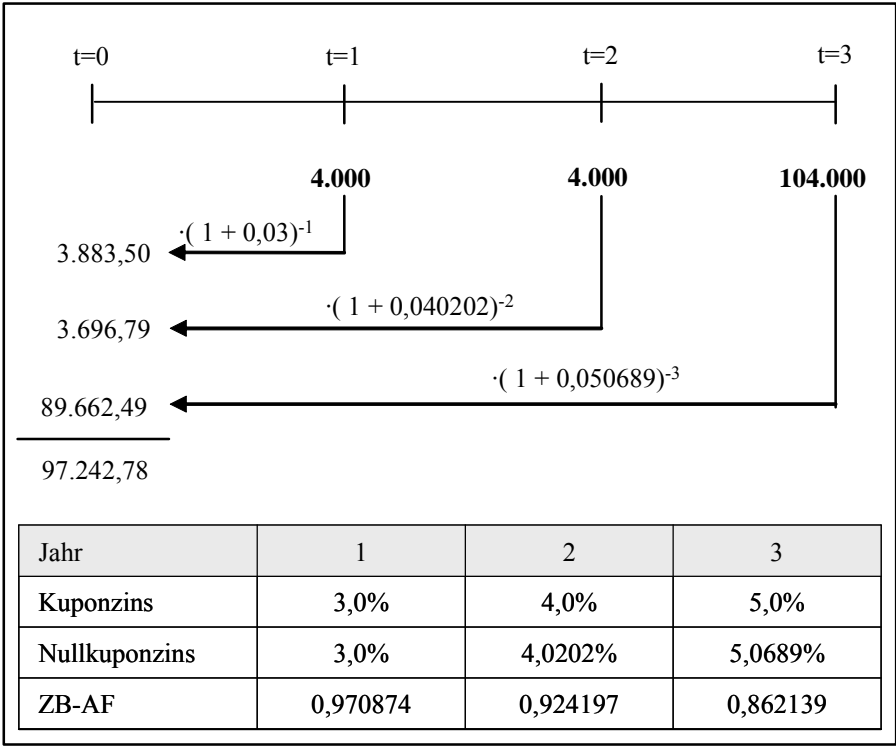


Abb. 1: Barwertermittlung mit Hilfe laufzeitspezifischer Nullkuponzinsen

Um den Barwert eines Wertpapiers mit Hilfe von Nullkuponzinsen zu bestimmen, werden die einzelnen Zahlungen mit den entsprechenden Nullkuponzinsen diskontiert. Die Summe dieser einzelnen Barwerte ergibt den Gesamtbarwert des Wertpapiers. Die Verwendung laufzeitspezifischer Zinssätze führt bei einer nicht horizontalen Zinsstrukturkurve dazu, dass die zu den unterschiedlichen Laufzeiten anfallenden Cashflows auch mit unterschiedlichen Zinsen diskontiert werden. Diese Annahme wird bei der Barwertermittlung mit Hilfe der Yield to Maturity aufgehoben.

Die *Yield to Maturity (YTM)* verwendet die Rendite eines Wertpapiers als einheitlichen Diskontierungszins für alle Laufzeiten (WIEDEMANN 2004a, S. 35 f.). Die Rendite ist dabei der Zinssatz, der sich ergibt, wenn das Wertpapier bis zu seiner Endfälligkeit gehalten und alle Zahlungen aus dem Wertpapier ebenfalls zu dieser Rendite bis zum Laufzeitende angelegt werden. Bei einer flachen Zinsstrukturkurve (Kuponzins = Nullkuponzins für jede Laufzeit) entspricht die YTM dem laufzeitkongruenten Kuponzins. Bei einer nicht horizontalen Zinsstrukturkurve wird die YTM durch Interpolation ermittelt. Abb. 2 zeigt den analytischen Zusammenhang noch einmal auf. Die einzelnen Barwerte unterscheiden sich zwar von denen mit Hilfe der Nullkuponzinsen ermittelten. Entscheidend ist aber allein der Gesamtbarwert und der ist in beiden Fällen identisch.

Laufzeit	Cashflow	Nullkuponzins	Barwerte
1	4.000	3,0%	3.883,50
2	4.000	4,0202%	3.696,79
3	104.000	5,0689%	89.662,50
			97.242,79

Laufzeit	Cashflow	YTM	Barwerte
1	4.000	5,0127%	3.809,06
2	4.000	5,0127%	3.627,24
3	104.000	5,0127%	89.806,49
			97.242,79

Abb. 2: Diskontierung mit Nullkuponzinsen und Yield to Maturity

Die Barwertermittlung hat zum Ziel, Zahlungen unterschiedlicher Zeitpunkte miteinander vergleichbar zu machen. Die Duration berücksichtigt den zeitlichen Anfall der Zahlungen bei der Ermittlung der mittleren Laufzeit des Wertpapiers. Eine

einfache Durchschnittsbetrachtung, die als Ergebnis immer die hälftige Laufzeit eines Wertpapiers als durchschnittliche Fälligkeit ausweisen würde, ignoriert die unterschiedliche Höhe der jeweiligen Zahlungen und liefert unbrauchbare Ergebnisse. Aus diesem Grund werden die einzelnen Zahlungszeitpunkte mit ihrem Barwert gewichtet und ihre Summe anschließend zu diesem ins Verhältnis gesetzt. Als Ergebnis erhält man die *Macaulay Duration (D)*:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot (1 + R)^{-t}}{BW}$$

Die Macaulay Duration ist eine Zeitraumkennzahl, die die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer zinsabhängiger Positionen zum Ausdruck bringt. Die Duration ist folglich umso kleiner, je schneller die Zahlungen aus einem Wertpapier an den Investor zurückfließen. Auf dieser Grundlage lassen sich folgende allgemein gültige Aussagen treffen (WIEDEMANN 2004a, S. 63 f.):

1. Die Duration einer Anleihe kann nie größer sein als ihre Restlaufzeit, da spätestens mit der letzten Zahlung das Kapital vollständig an den Investor zurückgezahlt wird. Bei Nullkuponanleihen, bei denen während der Laufzeit keine Zahlungen anfallen, ist die Duration gleich der Laufzeit.
2. Je kürzer die Restlaufzeit eines Wertpapiers ist, desto geringer ist auch seine Duration.
3. Die Duration kupontragender Wertpapiere ist immer geringer als ihre Restlaufzeit. Je höher der Kuponzins, desto geringer ist die Duration, denn je höher die während der Laufzeit generierten Zahlungen sind, desto schneller fließt das eingesetzte Kapital an den Investor zurück und desto schneller wird die Kapitalbindung verringert.
4. Aus der Formel lässt sich auch erkennen, dass eine höhere Rendite die Duration ebenfalls verringert. In diesem Fall werden auf Grund der stärkeren Diskontierung die Barwerte der einzelnen Zahlungen geringer und die weiter ent-

fernt liegenden Zahlungszeitpunkte werden prozentual weniger gewichtet als die näher in der Zukunft liegenden. Damit sinkt auch die Duration.

Nominalvolumen	100.000 EUR		
Zinskupon	4,00%		
Restlaufzeit	3 Jahre		
Aktueller Barwert	97.242,79 EUR		
Yield to Maturity	5,0127%		
Zahlungszeitpunkt (t)	Cashflows	Barwerte	Gewichtung der Zahlungszeit- punkte
(1)	(2)	$(3) = (2) \cdot 1,050127^{-t}$	$(4) = (1) \cdot (3)$
1	4.000	3.809,06	3.809,06
2	4.000	3.627,24	7.254,48
3	104.000	89.806,49	269.419,46
Summe	112.000	97.242,79	280.483,00
Macaulay Duration = 280.483,00 : 97.242,79 = 2,8844 Jahre			

Abb. 3: Ermittlung der Macaulay Duration einer Beispiel-Anleihe

Um eine Risikoanalyse mit dem Durationskonzept sachgerecht durchführen zu können, muss zunächst ein Planungshorizont festgelegt werden. Der Planungshorizont ist der Zeitpunkt, auf den der Investor seine Betrachtung abstellen will und für den das Zinsrisiko bestimmt werden soll. Dabei ist zu beachten, dass das Zinsrisiko eines Wertpapiers grundsätzlich in zwei Effekte aufgeteilt werden kann: den Barwerteffekt und den Wiederanlageeffekt.

Dem Wiederanlageeffekt sind alle Rückflüsse aus dem Wertpapier ausgesetzt, die vor dem Planungshorizont anfallen und die zu dem jeweils aktuellen Geld- und Kapitalmarktzins angelegt werden müssen. Liegt der Planungshorizont vor der Endfälligkeit der Anleihe, weil der Investor die Anleihe zu diesem Zeitpunkt veräußern möchte, besteht darüber hinaus noch ein Barwertrisiko, wenn auf Grund gestiegener Zinsen am Markt nur noch ein geringerer Kurs für das Papier gezahlt wird.

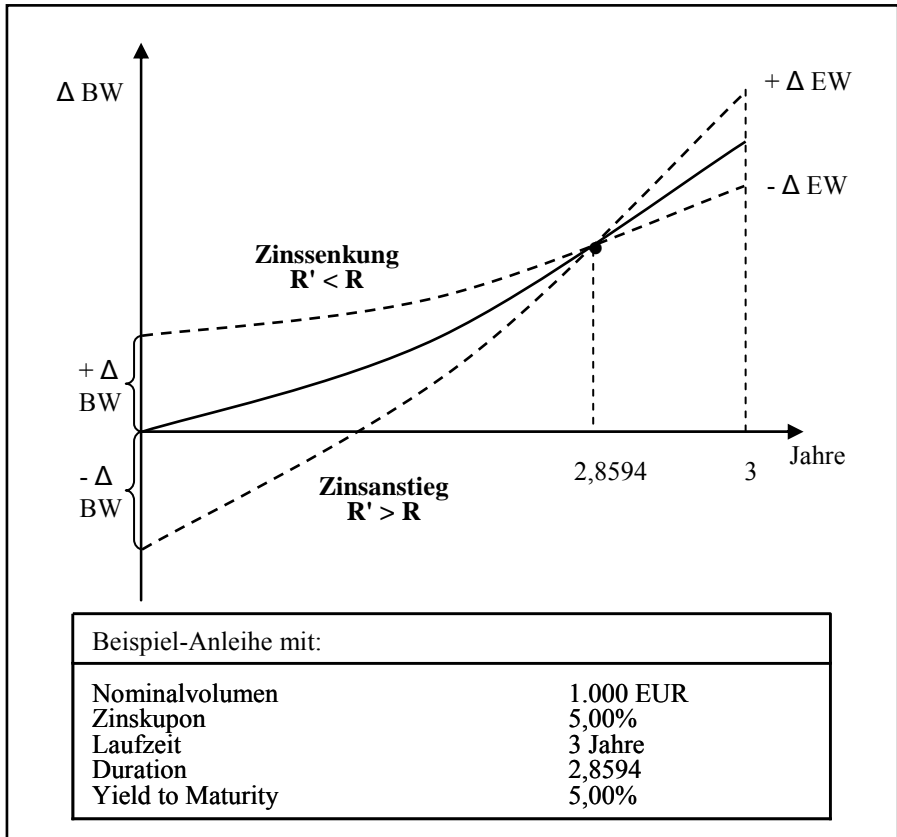


Abb. 4: Barwerteffekt und Wiederanlageeffekt

Die beiden Effekte wirken grundsätzlich gegenläufig: Im Falle steigender Zinsen erhöhen sich für die Rückflüsse aus dem Wertpapier die Wiederanlageerträge, während sich die stärkere Diskontierung zukünftiger Zahlungen negativ auf den Barwert des Wertpapiers auswirkt. Fallende Zinsen bewirken einen geringeren Ertrag aus der Wiederanlage der Rückflüsse, führen aber durch eine geringere Diskontierung zu positiven Barwerteffekten. Der Barwerteffekt wirkt bei einer Zinsänderung schneller und stärker, wird aber mit abnehmender Laufzeit von dem Wiederanlageeffekt überkompensiert. Im Zeitpunkt der Endfälligkeit wirkt sich der Barwerteffekt gar nicht mehr aus. Die Duration gibt den Zeitpunkt an, an dem sich

Barwert- und Wiederanlageeffekt gegenseitig aufheben (WIEDEMANN 2004a, S. 61 f.).

Abb. 4 macht das Wechselspiel zwischen Barwert- und Wiederanlageeffekt deutlich. (R) sei die laufzeitkongruente Marktrendite zum Ursprungszeitpunkt und (R') die veränderte Marktrendite im Betrachtungszeitpunkt. Zeitlich vor dem durch die Duration ermittelten Zeitpunkt dominiert der Barwerteffekt. Damit führen Zinssenkungen ($R' < R$) zwar zu geringeren Wiederanlageerträgen, diese werden aber durch die Kursgewinne des Wertpapiers (Barwerteffekt) überkompensiert, so dass insgesamt ein positiver Effekt entsteht. Für zeitlich nachgelagerte Planungshorizonte führen Zinssenkungen hingegen zu einer negativen Veränderung des Endvermögens, da ab dem Durationszeitpunkt der Wiederanlageeffekt den Barwerteffekt dominiert.

Die bis hierher gewonnenen Erkenntnisse finden ihre Anwendung vor allem im Portfoliomanagement, besonders im Management von so genannten Laufzeitenfonds. Sofern ein Laufzeitenfonds Wertpapiere enthält, deren Duration mit dem Fälligkeitstermin des Fonds übereinstimmt, trägt die gegenläufige Wirkung von Barwert- und Wiederanlageeffekt zu einer Immunisierung gegen Zinsrisiken des Fonds bei, denn die beiden Effekte heben sich im Durationszeitpunkt auf. Kursgewinne und -verluste aus Zinsrisiken treten damit nicht auf. Wird ein Laufzeitenfonds hingegen mit Wertpapieren länger laufender Duration bestückt, besteht für den Fall steigender Zinsen auf Grund des dominierenden Barwerteffektes ein Zinsrisiko, das sich in einem geringeren Endvermögen niederschlägt.

3 Modified Duration und Convexity

Die Macaulay Duration ist eine eindimensionale Zeitraumkennzahl, die lediglich für Timing-Entscheidungen eines Investments herangezogen werden kann. Die Macaulay Duration ist nicht in der Lage, die Auswirkung bestimmter Marktzinsveränderungen auf den Barwert eines Wertpapiers abzuschätzen. Zu diesem Zweck wird die *Modified Duration* herangezogen. Sie gibt an, um wie viel Prozent sich

der Kurswert einer Anleihe bei einer Renditeschwankung von einhundert Basispunkten (ein Prozentpunkt) ändert (WIEDEMANN 2004a, S. 64 ff.). Die Modified Duration ist damit keine Zeitraumkennzahl wie die Macaulay Duration, sondern eine prozentuale Größe. Die Modified Duration errechnet sich, indem die Durationsformel durch den Term $(1+R)$ dividiert wird:

$$MD = - \frac{D}{(1 + R)}$$

mit: MD = Modified Duration
D = Macaulay Duration
R = Markttrendite (= YTM)

Das Minuszeichen in der Formel spiegelt wider, dass sich der Kurswert einer Anleihe bei steigender Rendite verringert. Die Modified Duration kann damit als der Hebel angesehen werden, der angibt, um das Wievielfache die prozentuale Barwertveränderung eines Wertpapiers die sie verursachende Renditeänderung übersteigt. Die Wirkung einer Marktzinsänderung auf den Kurs einer Anleihe (relative Kursänderung) errechnet sich, indem die Modified Duration mit der jeweiligen Marktzinsänderung multipliziert wird. Ändert sich die Markttrendite bspw. um drei Prozentpunkte, ist die Modified Duration mit 3 zu multiplizieren. Das Ergebnis stellt die relative Barwertänderung der Anleihe bei einer unterstellten Marktzinsänderung von drei Prozent dar.

$$\Delta BW_{rel} = MD \cdot \Delta R$$

Um von der relativen zur absoluten Barwertänderung zu gelangen, ist die Modified Duration mit dem aktuellen Kurswert der Anleihe zu multiplizieren und das Ergebnis durch 100 zu dividieren:

$$\Delta BW_{abs.} = MD \cdot \frac{BW}{100} \cdot \Delta R$$

Abb. 5 zeigt die mit Hilfe der Modified Duration berechnete Barwertänderung der beschriebenen Beispiel-Anleihe bei einer Änderung der Markttrendite um drei Prozentpunkte.

Nominalvolumen:	100.000 EUR
Zinskupon:	4,00%
Restlaufzeit:	3 Jahre
Barwert:	97.242,79 EUR
Modified Duration:	- 2,7467
Yield to Maturity :	5,0127%

3 % ad hoc Verschiebung der Yield to Maturity	
relativ	absolut
$ \begin{aligned} BW_{rel} &= MD \cdot \Delta R \\ &= -2,7467 \cdot 3\% \\ &= - 8 \% \end{aligned} $	$ \begin{aligned} BW_{abs} &= MD \cdot \frac{BW}{100} \cdot \Delta R \\ &= -2,7467 \cdot \frac{97.242,79 \text{ EUR}}{100} \cdot 3 \\ &= -8.012,90 \text{ EUR} \end{aligned} $

Hinweis: YTM = 5,01271230910584% / MD = -2,74667494171572

Abb. 5: Ermittlung der Barwertänderung mit Hilfe der Modified Duration

Die Modified Duration ist ein recht einfach zu handhabendes Hilfsmittel, um Zinsrisiken eines oder mehrerer Wertpapiere abzuschätzen. Im Gegensatz zu den vollständigen Neubewertungsmodellen benötigt das Modell keine externen Marktdaten, um neue Kurswerte bzw. deren Veränderung zu ermitteln. Für eine Investitionsentscheidung ist ausschließlich die Markterwartung des Investors bedeutsam. Rechnet dieser in der Zukunft mit sinkenden Zinsen, wird er sich bei der Auswahlentscheidung zwischen zwei Wertpapieren für das Wertpapier mit der höheren Modified Duration entscheiden, denn eine höhere Modified Duration bedeutet im Fall sinkender Zinsen stärker steigende Kurswerte und somit höhere Gewinne als

bei einem Wertpapier mit geringerer Modified Duration. Es ist jedoch zu beachten, dass dieses Wertpapier auch bei Zinssteigerungen stärker reagiert. Irrt sich der Investor daher mit seiner Markterwartung, wirkt sich auch in diesem Fall die Barwertveränderung stärker aus.

Die einfache Ermittlung der Modified Duration wird allerdings mit verzerrten Ergebnissen erkaufte, denn die Modified Duration unterstellt implizit einen linearen Zusammenhang zwischen der Veränderung der Markttrendite und der Barwertänderung eines Wertpapiers. Führt man eine komplette Neubewertung des Wertpapiers bei unterschiedlichen Markttrenditen durch, zeigt sich, dass in der Realität ein konvexer Zusammenhang zwischen der Markttrendite und dem Kurswert besteht. Mit anderen Worten verlaufen die durch eine Neubewertung ermittelten Kurswerte eines Wertpapiers innerhalb eines Koordinatensystems auf einer linksgekrümmten Kurve und nicht - wie bei der Modified Duration unterstellt - auf einer Geraden (WIEDEMANN 2004a, S. 66 ff.).

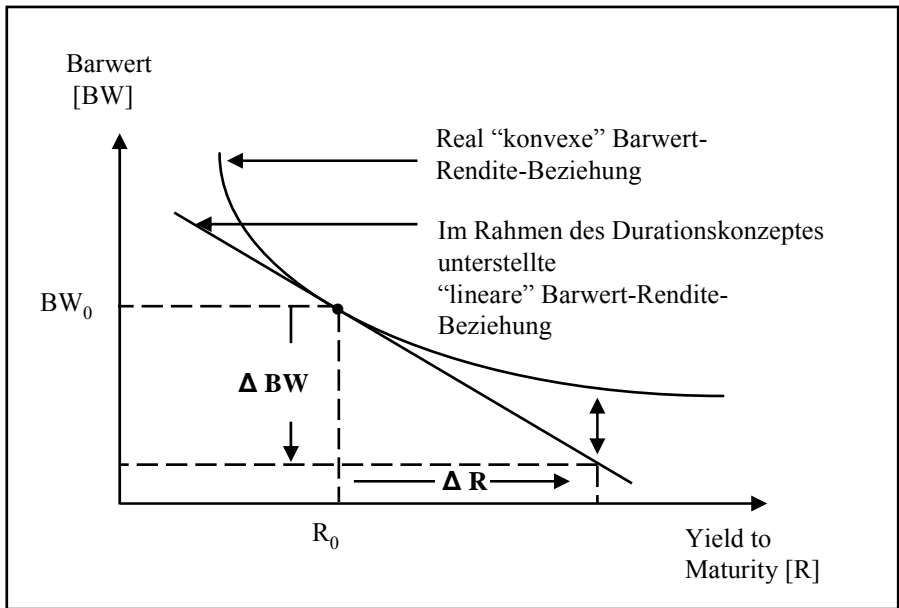


Abb. 6: Zusammenhang zwischen Markttrendite und Anleihekurs

Die Ursache des Schätzfehlers der Modified Duration ist in Abb. 6 grafisch verdeutlicht. Die tatsächliche Barwertkurve wird durch die Modified Duration exakt nur für die aktuelle Marktsituation ($\Delta R = 0$) abgebildet. Die auf der konvexen Barwertkurve liegenden Werte können durch die lineare Funktion der Modified Duration nicht genau nachgebildet werden. Der Grund liegt letztlich in der Macaulay Duration, aus der die Modified Duration abgeleitet wird. Diese besitzt nur für das aktuelle Renditeniveau Gültigkeit. Wie bereits festgestellt wurde, verringert (erhöht) sich die Macaulay Duration bei steigenden (sinkenden) Marktzinsen.

Für infinitesimal kleine Renditeänderungen und Wertpapiere mit endfälliger Tilgung kann der Schätzfehler der Modified Duration akzeptiert werden. Je stärker die Marktzinsänderung jedoch ist und je stärker die tatsächlichen Tilgungsstrukturen von der endfälligen Tilgung abweichen, desto stärker weichen die mittels der Modified Duration ermittelten Barwerte von denen durch eine Cashflow-Neubewertung ermittelten ab. Je nach Anspruch an die Genauigkeit der Messung eignet sich das Konzept der Modified Duration ab einer bestimmten Höhe der Renditeänderung nicht mehr, um zukünftige Barwerte mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen.

Die Verwendung der Modified Duration als Risikomaßstab ist jedoch insofern für einen Investor nutzbar, als dass der Schätzfehler immer konservativ erfolgt. Wie aus Abb. 6 ersichtlich, werden im Konzept der Modified Duration Kursgewinne (bei sinkender Rendite) unterschätzt und Kursverluste (bei steigender Rendite) überschätzt. Bei Anwendung der Modified Duration als Risikomaßstab befindet sich der Investor folglich immer auf der sicheren Seite.

Obwohl der Schätzfehler nicht zu einer Unterzeichnung des Risikos führt, kann der Investor an einer Verfeinerung des Konzepts mit dem Ziel, den Schätzfehler zu verringern, interessiert sein. Dies erfolgt über das Konzept der *Convexity*. Die Convexity kann als Veränderung des über die Modified Duration ermittelten Hebels interpretiert werden. Sie ist ein Maßstab für die Nicht-Linearität der Kurs-Rendite-Kurve. Damit gibt sie das Ausmaß der Abweichung zwischen der konvexen Barwertkurve und den linear geschätzten Werten der Modified Duration an.

Durch eine leicht abgewandelte additive Verknüpfung von Modified Duration und Convexity lassen sich die Schätzfehler des Konzeptes deutlich verringern. Die zusätzliche Beachtung der Convexity verändert die Ergebnisse der Modified Duration dergestalt, dass die ermittelten Kursgewinne um die Konvexität erhöht und die ermittelten Kursverluste um die Konvexität verringert werden. Damit werden die in beiden Fällen bisher zu vorsichtig ermittelten Ergebnisse der Modified Duration in Richtung auf die konvexe Kurve der tatsächlichen Barwertveränderungen korrigiert und der Schätzfehler verringert. Abb. 7 veranschaulicht diesen Effekt in grafischer Form.

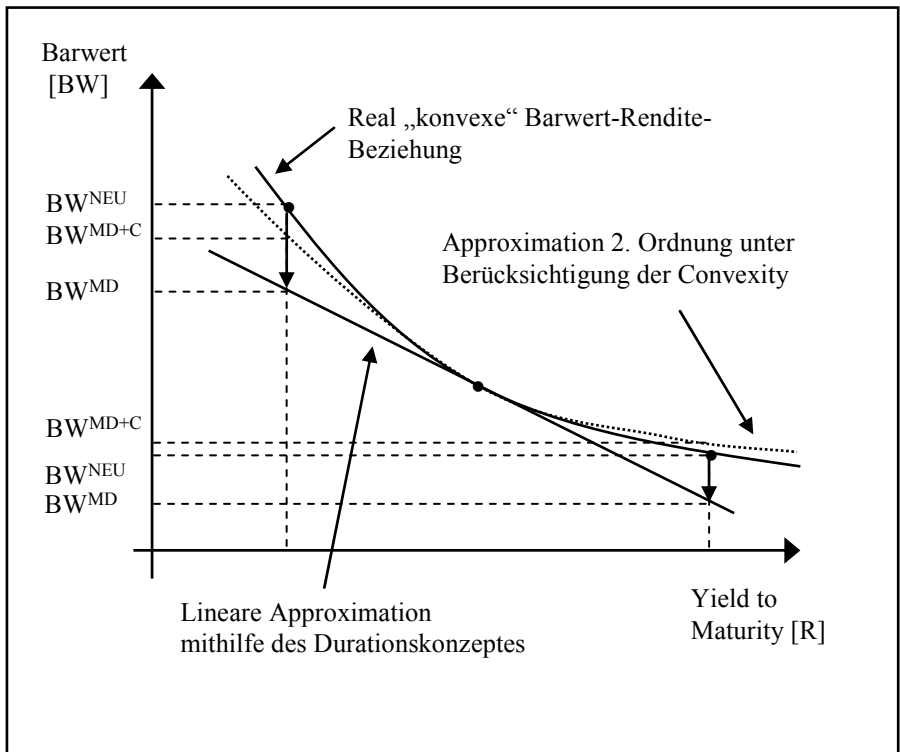


Abb. 7: Convexity und Schätzfehler der Modified Duration

Die Convexity ist nicht nur ein Instrument, um den Schätzfehler der Modified Duration zu verringern. Die Convexity besitzt für einen Investor auch die ganz praktische Bedeutung, dass bei einer Auswahlentscheidung zwischen mehreren Wertpapieren mit identischer Modified Duration dasjenige mit der höchsten Convexity gewählt werden sollte. Je größer die Renditeänderungen, desto stärker werden die Kursgewinne des Papiers erhöht und die Kursverluste vermindert. Zu beachten ist allerdings, dass sich auf Grund der höheren Nachfrage für Papiere mit höherer Convexity am Markt auch ein höherer Preis bilden wird, der den gezeigten Effekt wieder verringert. Dennoch besitzt die Convexity im Portfoliomanagement für den Bereich wertsteigernder Anlagestrategien eine erhebliche Aussagekraft.

4 Management komplexer Zinsstrukturkurvenrisiken

Allen bisher vorgestellten Konzepten ist gemein, dass ihre Berechnungen jeweils auf einer horizontalen Zinsstrukturkurve basieren. Bereits bei der Macaulay Duration wurden die Zahlungen der verschiedenen Zeitpunkte mit der einheitlichen Rendite des Wertpapiers (der Yield to Maturity) diskontiert. Die Annahme einer horizontalen Zinsstrukturkurve ist jedoch wirklichkeitsfremd. Um das Konzept der Durationsanalyse auf realistischere Marktgegebenheiten anwenden zu können, kann in einem ersten Schritt die konstante Yield to Maturity durch laufzeitspezifische Zerobondrenditen (Nullkuponzinssätze) ersetzt werden. Dieser Forderung kommt das Konzept der *Effective Duration* nach:

$$ED = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot (1 + z_t)^{-t}}{BW}$$

mit: ED = Effective Duration
 z_t = laufzeitspezifischer Nullkuponzins

Zahlungszeitpunkt (t)	Cashflows	Barwert	Gewichtung der Zahlungszeitpunkte	
(1)	(2)	(3) = (2) · 1,050127 ^{-t}	(4) = (1) · (3)	
1	4.000	3.809,06	3.809,06	
2	4.000	3.627,24	7.254,48	
3	104.000	89.806,49	269.419,46	
Summe	112.000	97.242,79	280.483,00	
Macaulay Duration = 280.483,00 : 97.242,79 = 2,8844 Jahre				
Zahlungszeitpunkt (t)	Cashflow im Zeitpunkt t	Laufzeit-spezifischer Nullkuponzins	Barwert	Gewichtung der Zahlungszeitpunkte
(1)	(2)	(3)	(4) = (2) · [1+(3)] ^{-t}	(5) = (1) · (4)
1	4.000	3,00%	3.883,50	3.883,50
2	4.000	4,02%	3.696,79	7.393,58
3	104.000	5,07%	89.662,50	268.987,50
Summe	112.000		97.242,79	280.264,58
Effective Duration = 280.264,58 : 97.242,79 = 2,8821 Jahre				

Abb. 8: Vergleich der Effective Duration mit der Macaulay Duration

Die Effective Duration hebt die Prämisse einer horizontalen Zinsstrukturkurve auf (WIEDEMANN 2004a, S. 72 ff.). Die Verwendung laufzeitspezifischer Nullkuponzinsen hat zur Folge, dass die Effective Duration bei normalem Verlauf der Zinsstrukturkurve unterhalb der Macaulay Duration liegt, denn eine mit zunehmender Laufzeit ansteigende Zinsstrukturkurve hat zur Folge, dass in weiterer Zukunft

liegende Zahlungen stärker diskontiert werden als kürzerfristige Zahlungen. Rein formal erklärt sich die geringere Effective Duration dadurch, dass die längerfristigen Zahlungen auf Grund der geringeren Barwerte mit geringeren Gewichten als bei Zugrundelegung einer horizontalen Zinsstrukturkurve in die Berechnung eingehen. Insgesamt ergibt sich im Vergleich zur Macaulay Duration eine leicht kürzere Effective Duration. Der Unterschied wird umso stärker, je steiler die Zinsstrukturkurve verläuft und je länger die Restlaufzeit des betrachteten Wertpapiers ist. Die Unterschiede in der Ermittlung der beiden Durationen macht Abb. 8 deutlich.

Die Effective Duration ist wie die Macaulay Duration auch eine Zeitraumkennzahl, die mit Hilfe der Division durch den Term $(1+R)$ für die Sensitivitätsmessung eingesetzt werden kann. Die Modified Effective Duration gibt dann ebenfalls an, um wie viel Prozent sich der Barwert eines Wertpapiers ändert, wenn sich die Markttrendite um ein Prozent nach oben oder nach unten verschiebt.

Auch wenn durch das Konzept der Effective Duration bereits eine realistischere Abschätzung des Zinsrisikos eines Wertpapiers vorgenommen werden kann, leiden dennoch sowohl die Modified Duration als auch die Modified Effective Duration unter einer grundlegenden Unzulänglichkeit, die beide Konzepte für das Management komplexerer Portfolien unbrauchbar macht. Beide Kennzahlen werden durch einfache Division der Durationsformel durch den Term $(1+R)$ hergeleitet. Damit wird implizit unterstellt, dass sich bei Marktzinsänderungen immer sämtliche Laufzeitzinssätze in gleichem Ausmaß ändern. Insofern basieren die Ergebnisse der bisher dargestellten Durationskonzepte allesamt auf der Annahme, dass eine Marktzinsänderung immer eine Parallelverschiebung der Zinsstrukturkurve bedeutet. Damit müssten jedoch alle Laufzeitzinssätze perfekt miteinander korreliert sein.

Eine perfekte *Korrelation* der Marktzinssätze ist jedoch unrealistisch. Vielmehr lässt sich beobachten, dass sich die Zinssätze in den unterschiedlichen Laufzeiten unterschiedlich stark verändern. Nur so ist überhaupt auch erst eine Drehung der Zinsstrukturkurve (bspw. von normal zu invers) möglich, deren Auswirkungen

weder von der Macaulay noch von der Effective Duration dargestellt werden können.

Um diesen Anforderungen genügen zu können, wurde das Konzept der *Key Rate Durationen* entwickelt, das die Veränderungen eines einzelnen Laufzeitzinssatzes jeweils gesondert in die Ermittlung der Duration eines Wertpapiers einfließen lässt. Mit Hilfe der Key Rate Durationen können auch die Barwertkonsequenzen von komplexen Zinsstrukturveränderungen abgebildet werden. Als Key Rates werden dabei - ähnlich wie bei der Effective Duration - die laufzeitspezifischen Nullkuponzinssätze bezeichnet, die sich aus der jeweils aktuellen Zinsstrukturkurve errechnen. Das Konzept der Key Rate Durationen sieht vor, dass sich die Key Rates individuell und unabhängig voneinander verändern können. Die Prämisse einer perfekten Korrelation der einzelnen Zinssätze wird damit aufgegeben (WIEDEMANN 2004a, S. 74 ff.).

Wie viele Key Rates in die Berechnung einfließen, liegt zunächst im Ermessen des Analysten. Grundsätzlich ist es aber sinnvoll, dass sich die Auswahl der Key Rates an dem zu Grunde liegenden Zinsinstrument und den aus ihm erfolgenden Zahlungen orientiert. So werden für eine fünfjährige Anleihe mit jährlicher Zinszahlung und endfälliger Tilgung idealer Weise die Key Rates am Ende eines jeden Jahres in die Berechnung einfließen. Sofern allerdings ein komplexeres Handelsportfolio analysiert werden soll, empfiehlt sich die Festlegung einer weitaus größeren Anzahl von Key Rates, denn bei einem Handelsportfolio liegen die Kauf- und Verkaufentscheidungen nicht von vornherein fest. Vielmehr werden die Entscheidungen häufig ad hoc auf der Grundlage der aktuellen Marktentwicklungen getroffen. Für diesen Fall ist es sinnvoll, für möglichst viele Zeitpunkte Durationen zu ermitteln, um bereits vorab einen Überblick über die möglichen Handlungsalternativen und deren Auswirkungen zu erhalten.

Abb. 9 zeigt eine durch Key Rates definierte Zinsstrukturkurve (durchgezogene Linie). Die gestrichelte Linie zeigt die angenommene Veränderung der Key Rates um ΔKR_1 . Dabei ist zu beachten, dass sich KR_1 völlig unabhängig von KR_2 oder den anderen Key Rates entwickeln kann. Dieser Fall ist in Abb. 9 verdeutlicht. Während KR_1 um einen Prozentpunkt steigt, sinkt KR_2 um 0,5 Prozentpunkte.

Weiterhin wird deutlich, dass bei der Auswahl von Jahres-Key Rates die dazwischen liegenden Zeitpunkte linear interpoliert werden können, sofern sie zur Bewertung einer Anleihe erforderlich sind (z.B. bei kündbaren Papieren). Steigt im vorliegenden Fall die 1-Jahres-Key Rate um einen Prozentpunkt, wird angenommen, dass die 6-Monats-Key Rate um 0,5 Prozentpunkte steigt, während sich die 18-Monats-Key-Rate lediglich um 0,25 Prozentpunkte erhöht, weil die 2-Jahres-Key Rate um 0,5 Prozentpunkte sinkt. Die gepunktete Linie zeigt die nach der Bewegung neu gebildete Zinsstrukturkurve.

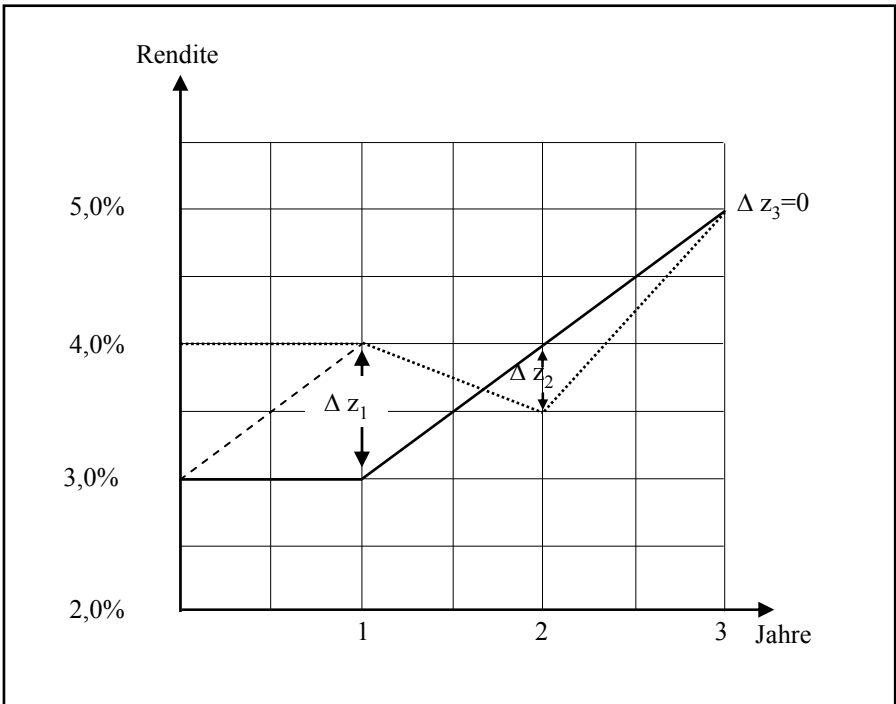


Abb. 9: Key Rates und ihre Bewegung

Die Formel für die Berechnung der Key Rate Durations weist eine gewisse Ähnlichkeit mit den bereits bekannten Formeln der Macaulay und Effective Duration auf:

$$\text{KRD}_t = \frac{t \cdot \text{CF}_t \cdot (1 + \text{KR}_t)^{-t-1}}{\text{BW}}$$

mit: KRD_t = Key Rate Duration für den Zeitpunkt t
 KR_t = laufzeitspezifische Key Rate (als Nullkuponzins)

Im Unterschied zu den bisherigen Methoden wird nicht mehr nur eine einzige Duration für ein Wertpapier ermittelt. Vielmehr wird jede aus der Anleihe generierte Zahlung als einzelne Zerobond-Anleihe betrachtet, für die eine Duration ermittelt wird. Die so ermittelten Key Rate Durations geben jeweils den prozentualen Betrag an, um den sich der Barwert des Wertpapiers ändert, wenn sich die Key Rate dieser Laufzeit um einen Prozentpunkt ändert. Die Key Rate Durations sind umso höher, d.h. der Barwert schwankt umso stärker, je weiter die betrachtete Zahlung in der Zukunft liegt und je größer das Nominalvolumen der betrachteten Zahlung ist. Dies erklärt sich aus der Tatsache, dass weiter in der Zukunft liegende Zahlungen über einen längeren Zeitraum und somit stärker diskontiert werden.

Darüber hinaus stellt sich bei endfälliger Tilgung einer Anleihe der Effekt ein, dass die dominierende Kapitalrückzahlung am Ende der Laufzeit anfällt. Damit besitzt der laufzeitlängste Zerobond das höchste Gewicht. Die Diskontierung dieses Kapitalbetrages ist im Verhältnis zum Barwert der Anleihe sehr viel größer, als wenn nur einzelne Zinszahlungen diskontiert werden. Analog zu den absoluten Größen können vergleichbar mit den Berechnungen bei den anderen Durationskonzepten auch hier relative Werte ermittelt werden.

Zur Berechnung der absoluten Barwertänderung einer Anleihe sind die Barwertänderungen der einzelnen Cashflows zu ermitteln und anschließend zu addieren. Rein technisch erfolgt die Berechnung dergestalt, dass die Cashflows der in Zerobonds zerlegten Anleihe mit ihrem Zahlungszeitpunkt gewichtet und anschließend durch den Term $(1+\text{KR})^{t+1}$ dividiert werden. Das Ergebnis zeigt die absolute Barwertänderung des jeweiligen Cashflows bei einer Änderung des laufzeitspezifischen Nullkuponzinses um einen Prozentpunkt.

5 Relevanz der Durationskonzepte für die Gesamtbanksteuerung

Sämtliche hier behandelten Durationskonzepte basieren auf finanzmathematischen Zusammenhängen, deren Komplexität mit steigender Genauigkeit der Messung zunimmt. Abschließend bleibt zu klären, wie eine Bank die Konzepte einsetzen und nutzen kann.

Nach den obigen Ausführungen ist es intuitiv einleuchtend, dass gerade der *Eigenhandel* detaillierte Kenntnisse im Bereich der Sensitivitätsverfahren besitzen sollte. Für den Handelsbereich eines Kreditinstituts ist es der Standardfall, dass Wertpapiere nicht bis zum Ende ihrer Laufzeit gehalten, sondern vorher wieder verkauft werden. Darüber hinaus kann es im Hinblick auf die subjektive Einschätzung der Marktentwicklung sinnvoll sein, Handelsportfolien öfter umzuschichten, um die erwartete Marktzinsänderung - gleich in welche Richtung und Höhe - zum eigenen Vorteil zu nutzen.

Neben den bereits beschriebenen Immunisierungsstrategien kann zum Beispiel die Modified Duration im Rahmen eines *Risk-Controlled Bondmanagements* mit dem Ziel der Begrenzung des Marktrisikos zum Einsatz kommen. Dabei wird durch geschickte Anleihenselektion ein repräsentativer Referenzindex derart nachgebildet (z.B. der *REX*), dass die Modified Duration des eigenen Portfolios dem des *REX* entspricht. Bei einer Änderung der Marktzinssätze werden sich folglich Handelsportfolio und Referenzindex weitgehend parallel entwickeln. Gestaltet man das Portfolio anschließend auch noch danach, dass eine möglichst hohe Convexity erreicht wird, kann auf diese Weise das Marktrisiko begrenzt bzw. bewusst an einem Index ausgerichtet werden.

Gerade die Convexity ist im modernen Portfoliomanagement von entscheidender Bedeutung. Es wurde bereits erläutert, dass es im Hinblick auf Marktzinsänderungen - gleich in welche Richtung - von Vorteil ist, wenn das Portfolio eine möglichst hohe Convexity aufweist. Der am Markt gebildete Preisaufschlag für eine hohe Convexity kann damit auch als „Versicherungsprämie“ interpretiert werden,

die ein Investor zahlt, um im Fall sich verändernder Zinssätze die Kursschwankungen möglichst gering zu halten. Umgekehrt wird diese Prämie umsonst gezahlt, wenn sich die Zinssätze nicht verändern. Die Wahl eines geeigneten Portfolios hängt damit entscheidend von der Frage ab, welche Markterwartung ein Investor bzw. Portfoliomanager hat. Durationsgleiche Portfolios mit geringerer Convexity werden häufig als *Bullet-Strategien*, solche mit höherer Convexity als *Barbell-Strategien* bezeichnet (KLEEBERG/REHKUGLER 2002, S. 472 ff.).

Auch in der Diskussion um die qualitative Dimension des Bankenaufsichtsrechts taucht das Durationskonzept immer wieder auf. *Basel II* sieht vor, dass Kreditinstitute zukünftig einen standardisierten Zinsschock und dessen Auswirkungen auf das Eigenkapital simulieren (BASEL COMMITTEE FOR BANKING SUPERVISION 2003, S. 26 ff.). Dabei wird ausdrücklich das Durationskonzept als eine Möglichkeit genannt, das Zinsrisiko der Bank approximativ zu ermitteln. Es wird vorgeschlagen, mit Hilfe einer Zinsbindungsbilanz die aus Wertpapieren, Verbindlichkeiten und außerbilanziellen Vermögensgegenständen resultierenden Cashflows einzelner Laufzeitbänder zu bestimmen und deren Duration zu berechnen.

Für *Exposures* in G10 Währungen wird dieser standardisierte Zinsschock beispielsweise durch eine Parallelverschiebung der Zinsstrukturkurve um 200 Basispunkte dargestellt. Zur Durchführung empfiehlt der Baseler Ausschuss einen fünfstufigen Kalkulationsprozess. In einem ersten Schritt sind die Long- und Short-Positionen innerhalb eines Laufzeitbandes zu aggregieren, so dass letztlich nur eine Nettoposition übrig bleibt. Je mehr Laufzeitbänder gewählt werden, desto größer ist die Genauigkeit der Berechnungen. Der Baseler Ausschuss stellt die Anzahl der in die Berechnung einfließenden Zeitpunkte größtenteils in den Verantwortungsbereich der nationalen Aufsichtsbehörden, veröffentlicht aber dennoch ein beispielhaftes Tableau von Laufzeitbändern, das den Aufsichtsbehörden als erste Orientierung dienen soll.

In einem zweiten Schritt werden anschließend die ermittelten Long- und Short-Positionen mit einem Sensitivitätsfaktor gewichtet. Dieser Sensitivitätsfaktor wird vorgegeben. Es handelt sich um die Modified Duration eines jeden Laufzeitbandes, dessen Rendite mit 5 % angenommen wird. Die ermittelte Kennzahl wird durch

einfache Multiplikation auf eine Renditeveränderung von 200 Basispunkten normiert und gibt damit die absolute Barwertveränderung dieses Laufzeitbandes bei der unterstellten Renditeveränderung an. Anschließend werden die Ergebnisse der einzelnen Laufzeitbänder summiert und in einem letzten Schritt zum Eigenkapital der Bank ins Verhältnis gesetzt.

Damit zeigt sich, dass mit der Durationsanalyse dem Betrachter ein Instrument an die Hand gegeben wird, mit dessen Hilfe es möglich ist, auch ohne eine vollständige Neubewertung sämtlicher Positionen Zinsrisiken abzuschätzen. Die Methodik der Analyse kann mit leichten Modifikationen auf unterschiedliche Gegebenheiten bzw. Analysevorgaben angepasst werden. Sowohl im Portfoliomanagement, in der Kundenberatung als auch im Aufsichtsrecht findet das Durationskonzept Anwendungsfelder und ist aus der Banksteuerung als einfach einsetzbares Hilfsmittel nicht mehr wegzudenken.

6 Statistische Verfahren

Neben dem Durationskonzept steht für die Messung des Zinsrisikos das *Barwertkonzept* zur Verfügung. Als Inputfaktoren für das Barwertkonzept dienen die Geld- und Kapitalmarktzinssätze und die aus den kontrahierten Produkten sich ergebenden Cashflows. Diese Cashflows werden bei jeder Zinsänderung komplett neu bewertet. Damit werden die aus den Zinsänderungen resultierenden Barwertänderungen sichtbar gemacht.

Als Risikomaß im Barwertkonzept wird der *Value at Risk* verwendet (ausführlich WIEDEMANN 2004b). Der Value at Risk ist der maximale Wertverlust eines Zinstitels oder eines Zinsportfolios, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit innerhalb einer bestimmten Haltedauer nicht überschritten wird (JORION 2001, S. 22). Damit besteht das Value at Risk-Konzept aus drei Komponenten. Zum einen aus der Feststellung des *Wertverlusts von Zinstiteln*. Dieser wird gemessen als negative Abweichung des Barwerts von aktuellen resp. erwarteten Barwert.

Als zweite Komponente fließt die *Haltedauer* ein. Diese stellt den Risikohorizont der Geschäfte dar. Näherungsweise kann die Haltedauer als Zeitraum verstanden werden, innerhalb dessen eine Bank eine Risikoposition abbauen kann.

Als drittes wird die vorgegebene *Wahrscheinlichkeit* in das Modell integriert. Diese drückt aus, wie viel Prozent der größten eintretenden negativen Wertänderungen in die Risikoberechnung mit aufgenommen werden sollen. Dabei gilt, dass je höher das gewünschte Sicherheitsniveau gewählt wird, desto größer das ausgewiesene Zinsrisiko sein wird. Diese Logik ist vergleichbar mit einer Versicherung mit und ohne Selbstbeteiligung. Sollen alle Verluste, die auftreten können, mitversichert werden, wird die Versicherung teurer. Ist man dagegen bereit, einen Teil des Risikos selber zu tragen, sinkt die Prämie.

Zwei der drei beschriebenen Komponenten werden vom Betrachter selbst ins Modell eingebracht. Die dritte Komponente ist hingegen marktgegeben. Eingebracht werden können die Haltedauer und die gewünschte Wahrscheinlichkeit. Für die Haltedauer kommen beim Zinsrisiko oft Zeiträume von einem oder zehn Tagen vor, wenn Handelsbuchpositionen gemessen werden sollen. Im Anlagebuch sind die Zeiträume länger (z.B. 63 Tage). Hat eine Bank in ihrem Handelsbestand beispielsweise eine börsennotierte Anleihe, ist es völlig unproblematisch diese innerhalb eines Tages zu verkaufen und das Risiko dieser Anleihe auf Null zu reduzieren. In der Gesamtbanksteuerung sind die Reaktionszeiträume länger.

Die zweite Komponente, die von einer Bank selbst eingebracht werden kann, ist die Wahrscheinlichkeit, mit der gerechnet werden soll. Mit der Wahrscheinlichkeit wird vorgegeben, wie streng das Value at Risk-Konzept das Zinsrisiko messen soll. VR-Control setzt eine Wahrscheinlichkeit von 99 % an. Die Interpretation des Value at Risk sei anhand einer angenommenen Haltedauer von 100 Tagen dargestellt. Damit wird angenommen, dass die tatsächlichen Barwertschwankungen innerhalb der nächsten 100 Handelstage an 99 Tagen innerhalb und an 1 Tag außerhalb des berechneten Value at Risk liegen werden. An 1 Tag kann ein höherer Verlust als der errechnete Value at Risk auftreten.

Dabei dürfen die Wahrscheinlichkeiten nicht derartig interpretiert werden, dass völlige Sicherheit über den Eintritt von größeren Verlusten als dem errechneten Value at Risk besteht. Sollten beispielsweise bei einer Wahrscheinlichkeit von 99 % bereits 99 Handelstage seit dem letzten Überschreiten des Value at Risk vergangen sein, ist es keineswegs sicher, dass am 100. Handelstag wieder der 1 %-Fall eintritt. Vielmehr ist die Wahrscheinlichkeit so zu interpretieren, dass über einen langen Zeitraum betrachtet, im Mittel jeweils an einem von 100 Handelstagen der Value at Risk überschritten wird. So könnte theoretisch 990 Handelstage hintereinander niemals ein Verlust größer als der Value at Risk auftreten, dann aber an den folgenden 10 Tagen hintereinander genau dieser Fall eintreten.

Über die barwertigen Verluste, die größer sind als der Value at Risk, sagt das Konzept selber nichts aus. In dieser Hinsicht ist es als eine Art Black-Box zu sehen. Die Verluste können den Value at Risk nur marginal übertreffen, sie können aber auch wesentlich größer sein. Um diese Verluste zu messen, muss auf andere Instrumente, z.B. die Szenarioanalyse oder die Extremwerttheorie, zurückgegriffen werden.

Die dritte, marktgegebene Komponente in der Berechnung ist der *Barwertverlust*, den ein Zinstitel durch zukünftige Zinsänderungen erleiden kann. Die zukünftigen Zinsentwicklungen sind heute noch unbekannt und können nicht deterministisch vorhergesagt werden, denn die Zinsentwicklung ist ein stochastischer, zufälliger Prozess. Um dennoch eine geeignete Basis zu haben, zukünftige Zinssätze möglichst objektiv vorherzusagen und damit alternative Barwerte berechnen zu können, erfordert das Value at Risk-Konzept Annahmen darüber, auf welche Art und Weise sich Zinssätze in der Zukunft ändern werden. Dabei werden drei Konzepte unterschieden (WIEDEMANN 2004b):

- Historische Simulation
- Varianz-Kovarianz-Ansatz
- Monte Carlo-Simulation

Die *Historische Simulation* ist ein nicht-parametrisches Verfahren. Das bedeutet, dass zur Vorhersage zukünftiger Zinssätze keine bestimmte statistische Verteilung unterstellt wird. Stattdessen wird zur Generierung zukünftiger Zinssätze auf Zinsszenarien zurückgegriffen, die in der Vergangenheit beobachtet wurden.

Der *Varianz-Kovarianz-Ansatz* ist dagegen ein parametrisches Verfahren. Er unterstellt, dass zukünftige Zinsänderungen einer statistischen Verteilung folgen. Im Regelfall wird als Verteilungstyp eine Standardnormalverteilung hinterlegt.

Die *Monte Carlo-Simulation* ist ein semi-parametrisches Verfahren und damit eine Mischung aus den beiden vorher genannten Ansätzen. Zwar benötigt die Monte Carlo-Simulation als Inputfaktor auch eine historische oder statistische Verteilung. In der weiteren Anwendung werden aber auf Basis der zugrundegelegten Verteilung eine Vielzahl von möglichen Zinsszenarien wie bei einem Roulette gezogen.

Im folgenden Kapitel wird näher auf die Historische Simulation eingegangen, die im Rahmen von VR-Control für die Steuerung des Zinsänderungsrisikos zum Einsatz kommt.

7 Historische Simulation

Bei der Historischen Simulation handelt es sich um einen nicht-parametrischen Ansatz zur Messung von Zinsrisiken, d.h. den Wertänderungen der Risikofaktoren im Zeitablauf wird keine vorgegebene statistische Verteilung zugrundegelegt. Stattdessen wird auf tatsächlich beobachtete Änderungen der Risikofaktoren zurückgegriffen. Auf die Aufstellung einer Korrelationsmatrix der Risikofaktoren kann damit auch verzichtet werden, da die historischen Reihen eine Korrelation implizit berücksichtigen. Aufgrund der genannten Eigenschaften setzt diese Berechnungsmethode keine tiefen mathematischen Kenntnisse voraus und der ausgewiesene Value at Risk ist intuitiv nachvollziehbar.

Zeitpunkt -t	1-J.-Zins $X_{1,-t}$...	5-J.-Zins $X_{5,-t}$
0	$X_{1,0}=3,01\%$		$X_{5,0}=4,06\%$
-1	$X_{1,-1}=3,05\%$		$X_{5,-1}=4,11\%$
-2	$X_{1,-2}=3,08\%$...	$X_{5,-2}=4,18\%$
-3	$X_{1,-3}=3,11\%$		$X_{5,-3}=4,24\%$
•	•		•
•	•		•
•	•		•
-249	$X_{1,-249}=3,06\%$		$X_{5,-249}=4,04\%$
-250	$X_{1,-250}=3,02\%$...	$X_{5,-250}=3,98\%$
<p>Historische Zeitreihe der 1- und 5-jährigen PEX-Renditen. 250 tägliche Marktzinsen vom 09.11.2001 bis 08.11.2002.</p> <p>Aktuelle Renditen am 11.11.2002: 3,01% (1 Jahr) und 4,06% (5 Jahre)</p>			

Abb. 10: Zeitreihe mit historischen Marktzinsen

Die potenziellen Wertänderungen der Risikofaktoren werden mittels historisch beobachteter Wertänderungen simuliert (vgl. Abb. 10). Aus der sich ergebenden Verteilung der Wertänderungen der Risikofaktoren kann in einem weiteren Schritt auf die Verteilung der Barwertänderungen geschlossen werden, um anschließend den Value at Risk zu ermitteln. Als Risikofaktoren können entweder die Marktzinsen oder die aus den Marktzinsen abgeleiteten Zerobond-Abzinsfaktoren herangezogen werden. Da aus praktischer Sicht die Verwendung von Marktzinsen in diesem Ansatz einfacher ist, wird im Folgenden diese Methodik anhand einer Beispielrechnung mit einer Zinshistorie erläutert. Dabei wird eine Haltedauer von 1 Tag und eine Beobachtungsperiode von 1 Jahr unterstellt.

Im ersten Schritt wird die historische Reihe der Risikofaktoren aufgestellt. Eine Historische Simulation auf Basis eines Zeitraums von einem Jahr besteht aus 250 Vergangenheitswerten, die an den jeweiligen Tagen beobachtet werden konnten. Hinzu kommt der aktuelle Wert. Dabei ist $X_{j,-t}$ der Wert des Risikofaktors j , der vor t Tagen beobachtet werden konnte. Der aktuelle (heutige) Wert des Risikofaktors wird mit $X_{j,0}$ bezeichnet.

Im nächsten Schritt werden die Wertänderungen der Risikofaktoren $R_{j,-t}$ an den aufeinander folgenden Tagen berechnet. Die Wertänderungen können auf Basis der Quotienten- oder der Differenzenmethode ermittelt werden. Bei der Quotientenmethode werden die relativen resp. logarithmierten Wertänderungen und bei der Differenzenmethode die absoluten Wertänderungen betrachtet.

Am Beispiel der Wertänderung des 1-Jahreszinses zwischen $t=0$ und $t=1$ seien die Unterschiede der beiden Methoden deutlich gemacht. Die logarithmierten Differenzen werden im Beispiel mithilfe des natürlichen Logarithmus gebildet.

- (1) Quotientenmethode (rel): $(X_{1,0}-X_{1,-1})/X_{1,-1} = (3,01\%-3,05\%)/3,01\% = -0,013\%$
- (2) Quotientenmethode (ln): $\ln(X_{1,0}) - \ln(X_{1,-1}) = \ln(3,01\%) - \ln(3,05\%) = -0,013\%$
- (3) Differenzenmethode: $X_{1,0} - X_{1,-1} = 3,01\% - 3,05\% = -0,04\%$

Für jeden Risikofaktor ergibt sich somit ein Vektor aus 250 beobachteten Änderungswerten (vgl. Abb. 11). Das folgende Beispiel verwendet die Differenzenmethode. Es werden absolute Zinsdifferenzen gebildet.

-t	1-J.-Zins $X_{1,-t}$	$R_{1,-t}=X_{1,-t+1} - X_{1,-t}$...	5-J.-Zins $X_{5,-t}$	$R_{5,-t}=X_{5,-t+1} - X_{5,-t}$
0	$X_{1,0} = 3,01\%$			$X_{5,0} = 4,06\%$	
-1	$X_{1,-1} = 3,05\%$	$R_{1,-1} = -0,04\%$...	$X_{5,-1} = 4,11\%$	$R_{1,-1} = -0,05\%$
-2	$X_{1,-2} = 3,08\%$	$R_{1,-2} = -0,03\%$		$X_{5,-2} = 4,18\%$	$R_{1,-2} = -0,07\%$
-3	$X_{1,-3} = 3,11\%$	$R_{1,-3} = -0,03\%$		$X_{5,-3} = 4,24\%$	$R_{1,-3} = -0,06\%$
.
.
-248	$X_{1,-248} = 3,06\%$	$X_{5,-248} = 4,05\%$.
-249	$X_{1,-249} = 3,06\%$	$R_{1,-249} = 0,00\%$		$X_{5,-249} = 4,04\%$	$R_{1,-249} = +0,01\%$
-250	$X_{1,-250} = 3,02\%$	$R_{1,-250} = +0,04\%$		$X_{5,-250} = 3,98\%$	$R_{1,-250} = +0,06\%$

Abb. 11: Wertänderungen der Risikofaktoren

Anschließend werden auf Basis der historischen Werte der Risikofaktoren potenzielle zukünftige Werte $S_{j,t}$ erzeugt. Simuliert werden sollen die Werte der Risikofaktoren am nächsten Tag. Dazu ist die historische Zeitreihe mit Zinssätzen über den aktuellen Zinssatz (heute) zu transformieren.

Die Transformation geschieht durch Addition der simulierten Risikofaktoränderungen zum aktuellen Wert des Risikofaktors (vgl. Abb. 12). Die erhaltenen Werte stellen alternative Werte des Risikofaktors in der Zukunft, also potenzielle Zinsszenarien dar, die alle gleich wahrscheinlich sind.

t	$X_{1,0} / R_{1,t}$	Szenario $S_{1,t}$...	$X_{5,0} / R_{5,t}$	Szenario $S_{5,t}$
0	$X_{1,0} = 3,01\%$			$X_{5,0} = 4,06\%$	
1	$R_{1,-1} = -0,04\%$	$S_{1,1} = 2,97\%$...	$R_{5,-1} = -0,05\%$	$S_{5,1} = 4,01\%$
2	$R_{1,-2} = -0,03\%$	$S_{1,2} = 2,98\%$		$R_{5,-2} = -0,07\%$	$S_{5,2} = 3,99\%$
3	$R_{1,-3} = -0,03\%$	$S_{1,3} = 2,98\%$		$R_{5,-3} = -0,06\%$	$S_{5,3} = 4,00\%$
.
.
.
249	$R_{1,-249} = 0,00\%$	$S_{1,249} = 3,01\%$		$R_{5,-249} = +0,01\%$	$S_{5,249} = 4,07\%$
250	$R_{1,-250} = +0,04\%$	$S_{1,250} = 3,05\%$...	$R_{5,-250} = +0,06\%$	$S_{5,250} = 4,12\%$

Abb. 12: Generierung alternativer Werte der Risikofaktoren

Bei Anwendung der Quotientenmethode würden sich die gleichen zukünftigen Zinsszenarien ergeben. Die Ermittlung der alternativen Werte $S_{j,t}$ sei am Beispiel des ersten Szenarios für den 1-Jahres-Zins demonstriert:

- (1) Quotientenmethode (rel): $S_{1,1} = X_{1,0} \cdot R_{1,-1} = 3,01\% / (1 + 0,013\%) = 2,97\%$
- (2) Quotientenmethode (ln): $S_{1,1} = X_{1,0} \cdot e^{(R_{1,-1})} = 3,01\% \cdot e^{(-0,013\%)} = 2,97\%$

Grundsätzlich können alle drei Methoden zu Berechnung der Zinsdifferenzen als gleichwertig betrachtet werden. Erst bei größeren Zinsschwankungen (über 100 Basispunkte) ergeben sich größere Unterschiede zwischen den Methoden. Diese sind jedoch bei kürzeren Haltedauern nicht zu erwarten. Daher empfiehlt es sich,

zum besseren Verständnis und wegen der einfacheren programmtechnischen Umsetzbarkeit die absoluten Differenzen zu verwenden.

Nachdem die mögliche zukünftige Marktentwicklung modelliert worden ist, werden mit den generierten Zinsen die alternativen Barwerte erzeugt. Dafür müssen die Nominal-Cashflows der im Portefeuille enthaltenen Zinspositionen mit den simulierten laufzeitspezifischen Marktzinsen bewertet werden (vgl. Abb. 13). Zu- grundegelegt wird der Barwertberechnung ein Nominal-Cashflow im ersten Jahr von 15.000 EUR und 20.000 EUR im fünften Jahr.

t	Szenario $S_{1,t}$	Barwert $BW_{1,t}$...	Szenario $S_{5,t}$	Barwert $BW_{5,t}$
1	$S_{1,1} = 2,97\%$	14.567,35		$S_{5,1} = 4,01\%$	16.430,64
2	$S_{1,2} = 2,98\%$	14.565,94	...	$S_{5,2} = 3,99\%$	16.446,45
3	$S_{1,3} = 2,98\%$	14.565,94		$S_{5,3} = 4,00\%$	16.438,54
•	•	•		•	•
•	•	•		•	•
•	•	•		•	•
249	$S_{1,249} = 3,01\%$	14.561,69	...	$S_{5,249} = 4,07\%$	16.383,33
250	$S_{1,250} = 3,05\%$	14.556,04		$S_{5,250} = 4,12\%$	16.344,04

Abb. 13: Ermittlung der Barwerte

Die Barwerte $BW_{1,1}$ und $BW_{5,1}$ errechnen sich beispielsweise wie folgt:

$$BW_{1,1} = 15.000 \cdot (1+0,0297)^{-1} = 14.567,35$$

$$BW_{5,1} = 20.000 \cdot (1+0,0401)^{-5} = 16.430,64$$

Die Bewertung der Cashflows mit allen simulierten Marktzinsen ergibt im Beispiel 250 potenzielle Barwerte für jedes Laufzeitband (vgl. Abb. 14). Die Addition der Barwerte über alle Laufzeitbänder ergibt ferner für jedes Zinsszenario einen Portefeuille-Barwert (vgl. Spalte 1). Der Portefeuille-Barwert $BW_{1,1} + BW_{5,1}$ von 30.997,99 ergibt sich aus der Addition der beiden Einzelwerte 14.567,35 und 16.430,64. Unter Einbeziehung des aktuellen Barwerts lassen sich anschließend 250 potenzielle Barwertdifferenzen errechnen (vgl. Spalte 2). Im letzten Schritt

werden die ermittelten Barwertdifferenzen der Größe nach sortiert (vgl. Spalte 3). Spalte 4 zeigt das zugehörige Szenario an und Spalte 5 den jeweiligen Rang.

t	Portfeuille-BW BW _{1,t} + BW _{5,t}	Barwert- differenzen	sortierte Barwert- differenzen	Szenario	Rang
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	30.952,90				
1	30.997,99	+ 45,09	+ 145,50	239	1
2	31.012,39	+ 59,48	+ 106,73	17	2
3	31.004,48	+ 51,58	+ 99,64	41	3
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
249	30.945,02	-7, 78	-178,45	232	249
250	30.900,08	-52,83	-195,14	238	250

Abb. 14: Sortieren der Barwertdifferenzen

Der Value at Risk entspricht in Abhängigkeit vom ausgewählten Konfidenzniveau dem n-kleinsten Wert der aufgestellten Verteilung. Für das von der Bankenaufsicht üblicherweise geforderte Konfidenzniveau von 99 % ergibt sich bei einer Beobachtungsperiode von 250 Handelstagen als Value at Risk der zweitkleinste Wert von: $250 \cdot (1 - 0,99) = 2,5 \rightarrow 2$. Der fettgedruckte Wert in Spalte (3) bei Rang 249 (Szenario 232) von 178,45 ist der gesuchte Value at Risk bei 99 % Aussagesicherheit.

Genau genommen wird der zweitkleinste Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,20 % nicht überschritten. Da der Value at Risk aber nicht zwischen den einzelnen Beobachtungen interpoliert wird und das Konfidenzniveau auch nicht verringert werden darf, wird in einem solchen Fall die größere Barwertdifferenz (d.h. ein höherer Verlust) als Value at Risk angenommen.

Das Ergebnis der durchgeführten Value at Risk-Berechnung lässt sich wie folgt interpretieren. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % wird der Barwertverlust des Portfolios, bestehend aus einem Nominal-Cashflow von 15.000 EUR in t=1 und 20.000 EUR in t=5, innerhalb eines Tages nicht größer als 178,45 EUR sein.

Die Historische Simulation ist in der Praxis ein weit verbreitetes Verfahren. Vor allem der Verzicht auf statistische Verteilungsannahmen trägt zu besseren Nachvollziehbarkeit und Interpretierbarkeit bei. Die Simulation von Szenarien in Verbindung mit einer wiederholten Neubewertung des zugrunde liegenden Portefeuilles ermöglicht auch eine Risikoschätzung bei nichtlinearen Produkten. Die Barwerte der Zinsoptionen können dafür auf Basis der ermittelten Zinsszenarien und der Schätzung der übrigen erforderlichen Parameter vollständig berechnet werden.

Der auf Basis der Historischen Simulation ermittelte Value at Risk kann auch grafisch mithilfe der Häufigkeitsverteilung dargestellt werden (vgl. Abb. 15).

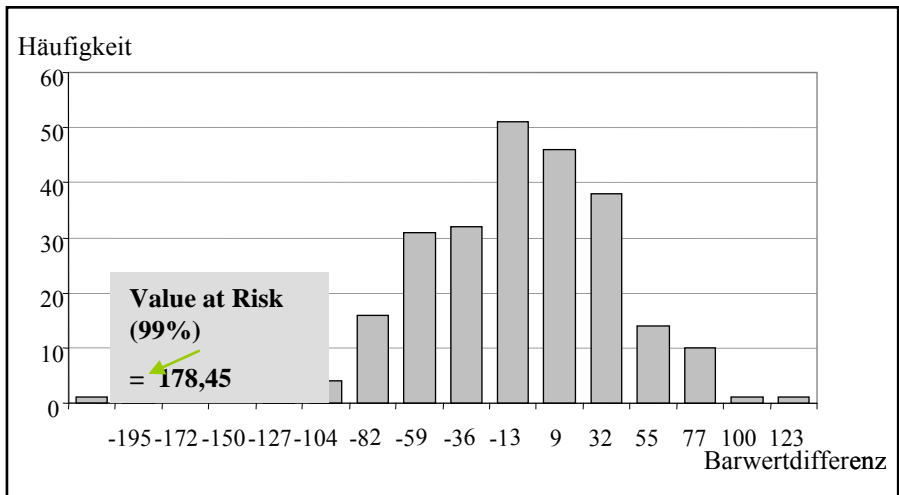


Abb. 15: Häufigkeitsverteilung der Barwertdifferenzen

Durch die Verwendung der empirischen Verteilungsfunktion können insbesondere Fehler in der Modellierung der Flanken vermieden werden, so dass sich das Risiko auf höherem Konfidenzniveau besser abschätzen lässt. Da ferner auch keine statistischen Parameter wie die Volatilität oder die Kovarianz geschätzt werden müssen, besteht auch nicht die Gefahr, dass diese Parameter falsch berechnet werden und Modellrisiken entstehen.

Für die Historische Simulation sind komplette Zeitreihen erforderlich. Einige wenige Ausreisser innerhalb der verwendeten Daten können das Ergebnis stark beeinflussen. Auch führt eine zu geringe Anzahl an Beobachtungen in den Flanken zu viel höheren Varianzen als im Zentrum der Verteilung, wodurch die statistische Aussagekraft ebenfalls geschwächt werden kann.

Literaturverzeichnis:

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION 2003: Principles for the Management and Supervision of Interest Rate Risk, Consultative Paper, Basel.

JORION, P. 2001, Value at Risk, 2. Aufl., New York.

Eller, R. 2001: Modernes Bondmanagement, 2. Aufl., Wiesbaden.

KLEEBERG, J.; REHKUGLER, H. 2002: Handbuch Portfoliomanagement, 2. Aufl., Bad Soden.

SCHIERENBECK, H. 2003: Ertragsorientiertes Bankmanagement, Band 2 - Risikocontrolling und integrierte Rendite-/Risikosteuerung, 8. Aufl., Wiesbaden.

WIEDEMANN, A. 2004a: Financial Engineering - Bewertung von Finanzinstrumenten, Band 1 der Schriftenreihe ccfb-competence center finanz- und bankmanagement, hrsg. von A. Wiedemann, 2. Aufl., Frankfurt am Main.

WIEDEMANN, A. 2004b: Risikotriade - Zins-, Kredit- und operationelle Risiken, Band 4 der Schriftenreihe ccfb - competence center finanz- und bankmanagement, hrsg. von A. Wiedemann, Frankfurt am Main.

Beitrag entnommen aus:

Integrierte Rendite-/Risikosteuerung,

hrsg. von Arnd Wiedemann und Uwe Lüders,

2. Aufl., Münster 2006,

S. 107-141.