Inhaltsübersicht

1 Finanzmathematische Grundlagen

1.1 Basiselemente der Finanzmathematik

1.1.1 Zinsbegriffe

Die Grundlage für die Bewertung sämtlicher Zinsinstrumente sind Marktzinsen. An den internationalen Finanzmärkten existieren eine Vielzahl von Zinssätzen und gleichzeitig auch eine große Anzahl an unterschiedlichen Bezeichnungen für die verschiedenen Zinssätze. Zu Beginn dieses Kapitels werden die wichtigsten Zinsbegriffe dargestellt, die unterschiedlichen Zählweisen, die an den Märkten existieren beschrieben, sowie die drei Zinskalküle lineare, exponentielle und kontinuierliche Verzinsung erläutert. Abschließend wird auf den Begriff und das Wesen von Zinsstrukturkurven eingegangen.

Als **Nominalzins** wird derjenige Zins bezeichnet, welcher den Kosten einer Geldaufnahme bzw. dem Ertrag für eine Geldanlage für eine bestimmte Zeitperiode entspricht. Ist beispielsweise der Nominalzins für ein Girokonto 1 % p.a., erhält der Kontoinhaber für jeden sich heute durchgängig für das ganze nächste Jahr auf dem Konto befindlichen Euro einen Cent nach Ablauf des Jahres an Zinsen.

Kuponzinssätze werden die Zinssätze von klassischen festverzinslichen Anleihen genannt (vgl. Kapitel 3.1). Sie geben denjenigen Zinssatz an, zu dem sich ein Straight Bond, d.h. eine Anleihe mit jährlicher Zinszahlung und endfälliger Tilgung, verzinst.

In der Praxis wird sehr oft auch mit **Nullkuponzinssätzen**, sogenannten **Zero Rates** kalkuliert. Diese Zinssätze berücksichtigen den Zinseszinseffekt bei mehrjährigen Geldaufnahmen oder -anlagen. Die Zero Rates schließen Zinszahlungen zwischen dem Beginn und dem Ende eines Finanzgeschäftes aus, so dass nur noch zwei Zahlungszeitpunkte existieren, der Beginn und das Ende des jeweiligen Geschäftes.

1.1.2 Zählweisen

Hinter oder vor den aktuellen Kursen von Anleihen stehen oft die Bezeichnungen „30/360“, „30/365“, „act/360“, „act/365“ oder „act/act“. Diese Bezeichnungen beziehen sich auf die jeweilige Zählweise der Tage für die Zinsberechnung.

Bei der Bezeichnung **30/360** wird unabhängig von der tatsächlichen Anzahl der Tage in einem Monat, jeder Monat mit 30 Tagen und das Jahr mit 360 Tagen angesetzt. Bei **30/365** wird dementsprechend das Jahr mit 365 Tagen kalkuliert.

Die Bezeichnungen **act/360** und **act/365** bedeuten, dass bei der Ermittlung der Laufzeittage die exakte kalendarische Anzahl der Tage angesetzt wird und das Jahr wiederum pauschal mit 360 bzw. 365 Tagen gezählt wird.

Bei der letzten Bezeichnung **act/act** werden sowohl die Laufzeittage als auch die Tage des Kalenderjahres exakt ermittelt.

Innerhalb der beschriebenen Zählweisen kann durch Umformen jede Zählweise in eine andere transformiert werden. Wird beispielsweise für einen Zinssatz i_1 mit der Zählweise act/360 der entsprechende Zinssatz i_2 mit der Zählweise act/365 gesucht, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$i_2 = \frac{360}{365} \cdot i_1 \qquad \text{und} \qquad i_1 = \frac{365}{360} \cdot i_2$$

Bei einem 1-Jahreszins i_1 auf Basis act/360 von 5,00 % ergibt sich ein korrespondierender Zinssatz i_2 auf Basis von act/365 von 4,93 %:

$$i_2 = \frac{360}{365} \cdot i_1 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{360}{365} \cdot 5{,}00 = \mathbf{4{,}93\ \%}$$

Wird für einen Zinssatz i_1 mit m Zinsverrechnungsterminen pro Jahr ein entsprechender Zinssatz i_2 mit nur einem Zinsverrechnungstermin im Jahr gesucht, ergibt sich folgende Beziehung:

$$i_2 = \left[1 + \frac{i_1}{m}\right]^m - 1 \qquad \text{und} \qquad i_1 = \left[(1 + i_2)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \cdot m$$

Sei i_1 mit m=2 Zinsverrechnungsterminen pro Jahr (halbjährliche Zinszahlungen) gleich 4,94 %, dann ergibt sich ein korrespondierender Zins i_2 mit nur einem Zinsverrechnungstermin pro Jahr von 5,00 %:

$$i_2 = \left[1 + \frac{0{,}0494}{2}\right]^2 - 1 = 0{,}05 = \mathbf{5{,}00\ \%}$$

1.1.3 Zinskalküle

Nachdem die unterschiedlichen Zinssätze und deren Zählweisen erläutert wurden, folgt jetzt die Darstellung der verschiedenen Methoden zur Berechnung der Zinsen. Dabei wird zwischen linearer oder einfacher Verzinsung, exponentieller und kontinuierlicher Verzinsung unterschieden.

Die **lineare Verzinsung** ist die einfachste Form der Verzinsung. Die mathematische Formel für diese Methode der Verzinsung lautet:

$$NV_n = NV_0 \cdot (1 + i \cdot LZ(t_0, t_n))$$

mit:
- NV_n = Nominalvolumen inklusive Zinszahlung in t=n
- NV_0 = Nominalvolumen
- i = Zinssatz
- $LZ(t_0,t_n)$ = Laufzeit von t=0 bis t=n in Jahren

Anhand eines Beispiels soll die Berechnung einer linearen Verzinsung dargestellt werden. Ein Anleger habe 100 EUR Anfangskapital, welches er für drei Jahre zu einem Zinssatz von 4 % anlegen möchte. Bei linearer Verzinsung erhält er innerhalb der drei Jahre 112 EUR:

$$NV_3 = 100 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 3) = 112 \text{ EUR}$$

Die Methode der linearen Verzinsung betrachtet keine Zinseszinseffekte, sondern addiert lediglich die jährlich anfallenden Zinszahlungen von 4 EUR zu insgesamt 12 EUR nach 3 Jahren.

Mit Hilfe der **exponentiellen Verzinsung** lässt sich der bei der linearen Verzinsung vernachlässigte Zinseszinseffekt berücksichtigen. Mathematisch ergibt sich die exponentielle Verzinsung aus:

$$NV_n = NV_0 \cdot (1 + i)^{LZ(t_0, t_n)}$$

Betrachtet man erneut obiges Beispiel der 3-jährigen Geldanlage von 100 EUR zu 4 %, resultiert bei exponentieller Verzinsung nach 3 Jahren ein Kapitalbetrag in Höhe von 112,49 EUR:

$$NV_3 = 100 \cdot (1 + 0{,}04)^3 = 112{,}49 \text{ EUR}$$

Derselbe Betrag ergibt sich auch mit der linearen Verzinsung, wenn die jährlich anfallenden Zinsen stets erneut für ein Jahr anlegt werden (vgl. Abb. 1).

t	0	1	2	3	Summe
Nominal-volumen	100,00				100,00
Zinsen	→	4,00	4,00	4,00	12,00
Zinses-zinsen		→	$4 \cdot 0{,}04 = 0{,}16$	$4 \cdot 0{,}04 = 0{,}16$ → $4{,}16 \cdot 0{,}04 = 0{,}17$	0,49
Summe	100,00	4,00	4,16	4,33	12,49

Abb. 1: Überführung der linearen in exponentielle Verzinsung

Bei der Methode der **kontinuierlichen oder stetigen Verzinsung** wird schließlich davon ausgegangen, dass die Zinsen nicht nur jährlich weiterverzinst werden, sondern täglich bzw. kontinuierlich. Mathematisch errechnet sich die kontinuierliche Verzinsung aus folgender Formel:

$$NV_n = NV_0 \cdot e^{i \cdot LZ(t_0, t_n)}$$

Aus dem obigen Beispiel würde nach drei Jahren ein Kapitalbetrag in Höhe von 112,75 EUR resultieren:

$$NV_3 = 100 \cdot e^{0{,}04 \cdot 3} = 112{,}75 \text{ EUR}$$

Auch in diesem Fall kann der stetige Zinssatz aus der einfachen linearen Verzinsung berechnet werden. Dafür müssen in einem ersten Schritt beide Kapitalbeträge inklusive Zinszahlungen in t=n gleichgesetzt werden. Durch Einsetzen und entsprechende Umformungen ergibt sich schließlich folgende Formel:

$$i_{\text{kontinuierlich}} = \frac{\ln\left[1 + i_{\text{linear}} \cdot LZ(t_0, t_n)\right]}{LZ\ (t_0, t_n)}$$

Im Beispiel wäre ein linearer 3-Jahreszins von 4,00 % äquivalent einem exponentiellen 3-Jahreszins von 3,78 %.

$$i_{\text{kontinuierlich}} = \frac{\ln(1+0{,}04 \cdot 3)}{3} = 0{,}0378 = \mathbf{3{,}78\ \%}$$

Fazit: Je häufiger die anfallenden Zinsen dem Kapital zugerechnet und mitverzinst werden, desto höher ist der Kapitalbetrag am Ende der Laufzeit. Einen Vergleich aller drei Zinskalküle zeigt Abb. 2.

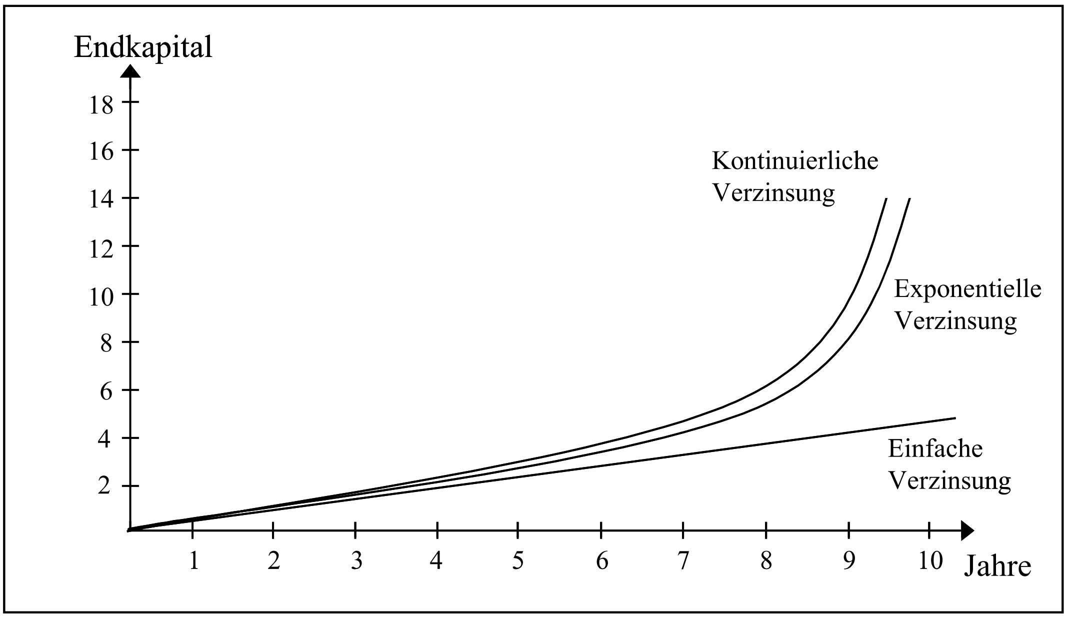


Abb. 2: Vergleich der drei Zinskalküle

1.1.4 Zinsstrukturkurven

In der Regel können an den Finanzmärkten für unterschiedliche Laufzeiten auch verschiedene Zinssätze beobachtet werden. Geldmarktzinsen decken den Laufzeitbereich von einem Tag bis zu einem Jahr ab. Quotiert werden Geldmarktzinsen üblicherweise im Abstand von einem Monat. Überjährig existieren Zinssätze am Kapitalmarkt für Laufzeiten von einem bis zu 30 Jahren. Hier werden die Zinssätze in Laufzeiten von ganzen Jahren notiert.

Werden sämtliche Punkte von bekannten Zinssätzen des Geld- und Kapitalmarktes in einem Koordinatensystem abgetragen, welches jeder Laufzeit den entsprechenden Zinssatz zuordnet, und diese Punkte daraufhin miteinander verbunden, erhält man eine **Zinsstrukturkurve**. Liegt vereinfacht der 1-jährige Zinssatz bei 4 %, der 2-jährige bei 5 % und der 3-jährige bei 6 %, resultiert daraus die in Abb. 3 dargestellte Zinsstrukturkurve.

Laufzeit	1 Jahr	2 Jahr	3 Jahr
Zinssatz	4 %	5 %	6 %

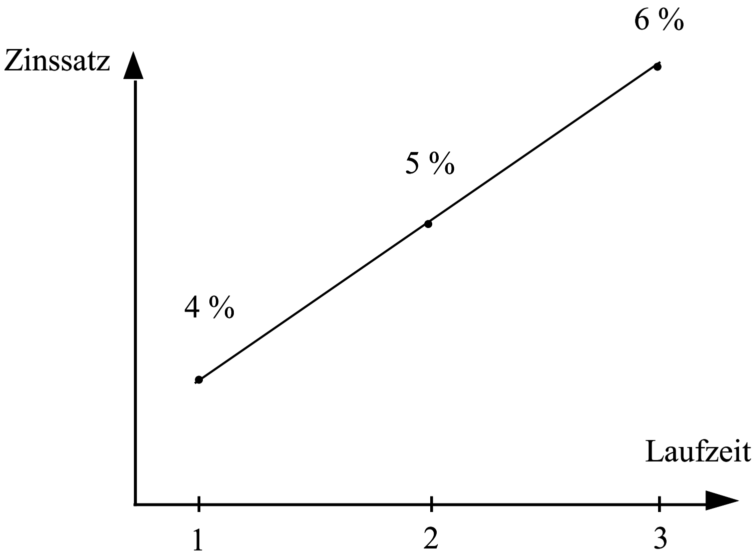


Abb. 3: Konstruktion einer Zinsstrukturkurve

Eine bekannte Zinsstrukturkurve an den deutschen Finanzmärkten leitet sich aus dem **Deutschen Rentenindex,** kurz **REX** genannt, ab. Der REX ist ein Indikator für die Kursentwicklung von Anleihen, der in Euro ausgewiesen dem Kurs einer Bundesanleihe mit einem durchschnittlichem Kupon von 7,44 % entspricht und stets eine durchschnittliche Laufzeit von 5,49 Jahren aufweist. Die Berechnung erfolgt in fünf Schritten (vgl. STEINER/BRUNS 2000, S. 147):

1. Es werden die Renditen aller Anleihen, Obligationen und Schatzanweisungen des Bundes sowie des Fonds Deutscher Einheit aus den jeweiligen Schlusskursen berechnet.

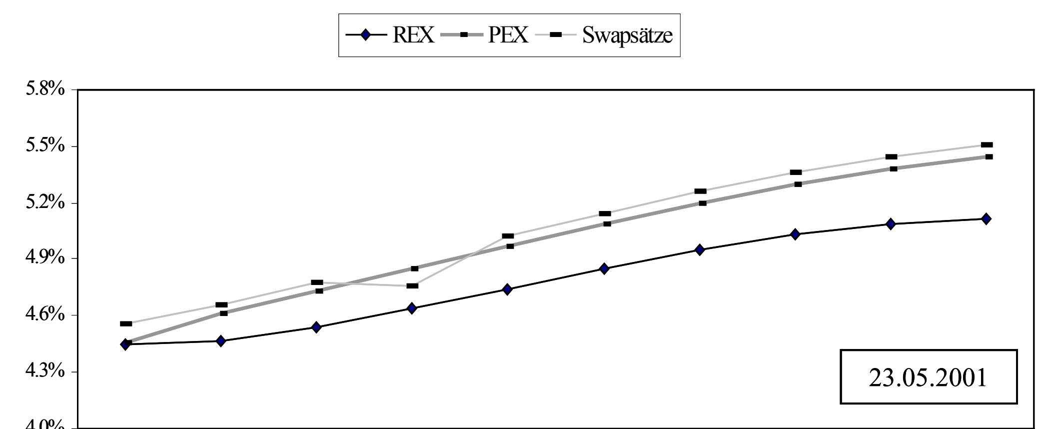
2. Daraus wird die Renditestruktur in Abhängigkeit vom jeweiligen Kupon und der jeweiligen Laufzeit erstellt.

3. Aus der erstellten Renditestruktur werden diejenigen Renditen mit ganzzahligen Laufzeiten in die Kurse von 30 Indexanleihen umgerechnet. Bei den 30 Indexanleihen handelt es sich um fiktive idealtypische Anleihen mit ganzzahligen Laufzeiten zwischen 1 und 10 Jahren sowie drei verschiedenen Kuponzinssätzen in Höhe von 6 %, 7,5 % und 9 %.

4. Jeder der ermittelten Kurse wird mit seinem aus drei kompletten Zinszyklen errechneten Gewicht multipliziert.

5. Die Summe der 30, mit den Gewichten multiplizierten Kurse ergibt den REX. Ausführlich wird die Konzeption des REX bei SCHIERENBECK/WIEDEMANN 1996, S. 244 ff. dargestellt.

Die Basis für die Berechnung des REX bildet der 30.12.1987. Abb. 4 zeigt die Zinsstrukturkurven des REX und zusätzlich des **PEX** (Deutscher Pfandbriefindex) sowie die **Swapsätze** vom 23.05.2001.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
REX	4.4503%	4.4645%	4.5379%	4.6360%	4.7446%	4.8541%	4.9537%	5.0344%	5.0901%	5.1137%
PEX	4.4582%	4.6086%	4.7300%	4.8523%	4.9704%	5.0875%	5.2008%	5.2959%	5.3757%	5.4398%
Swapsätze	4.5550%	4.6550%	4.7800%	4.7550%	5.0250%	5.1450%	5.2600%	5.3600%	5.4400%	5.5100%

Abb. 4: REX-, PEX- und Swapkurve im Vergleich

Liegen die kurzfristigen Zinsen unter den langjährigen, spricht man von einer **„normalen" Zinsstrukturkurve**. Sind hingegen die kurzfristigen Zinsen höher als die langfristigen wird die Zinsstrukturkurve als „**invers**" bezeichnet. Sind die

Zinsen aller Laufzeiten gleich hoch, liegt eine **„flache“ Zinsstrukturkurve** vor (vgl. Abb. 5).

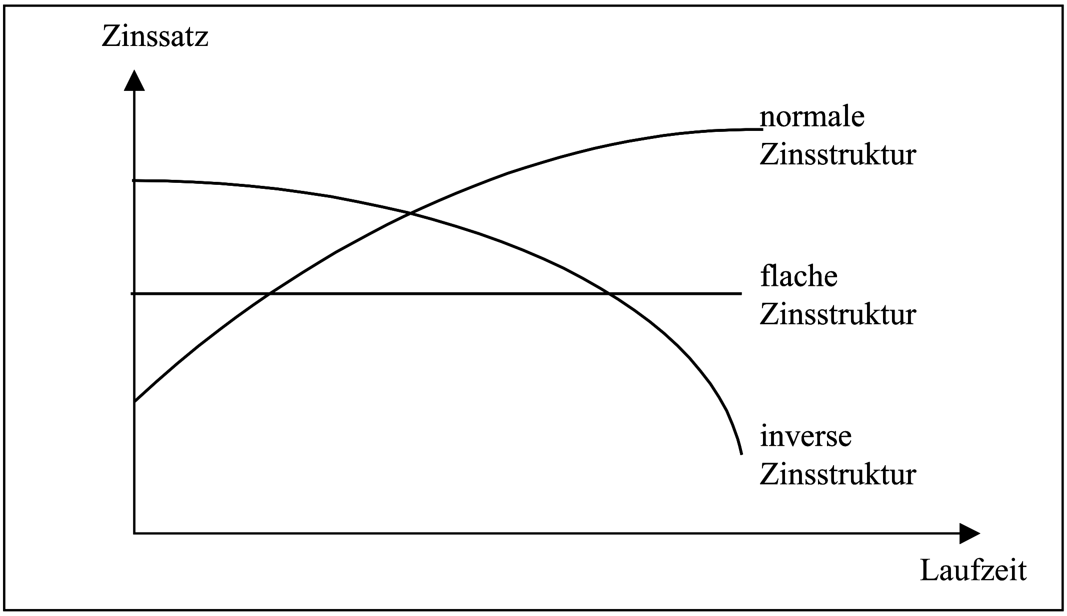


Abb. 5: Normale, inverse und flache Zinsstrukturkurve

1.2 Zahlungsstrom-Transformatoren

1.2.1 Zerobond-Abzinsfaktoren

Unter Zahlungsstrom-Transformatoren werden alle Instrumente zusammengefasst, mit denen Zahlungen auf der Zeitachse verschoben werden können. Dabei werden drei Bewertungsfaktoren unterschieden, der Bewertungszeitpunkt, die Transformationsrichtung und der Transformationszeitraum. Durch diese drei Faktoren lassen sich sämtliche Möglichkeiten der Zahlungsstromtransformation durch den in Abb. 6 dargestellten **Kalkulationszinswürfel** beschreiben (vgl. SCHIERENBECK/ WIEDEMANN 1996, S. 11).

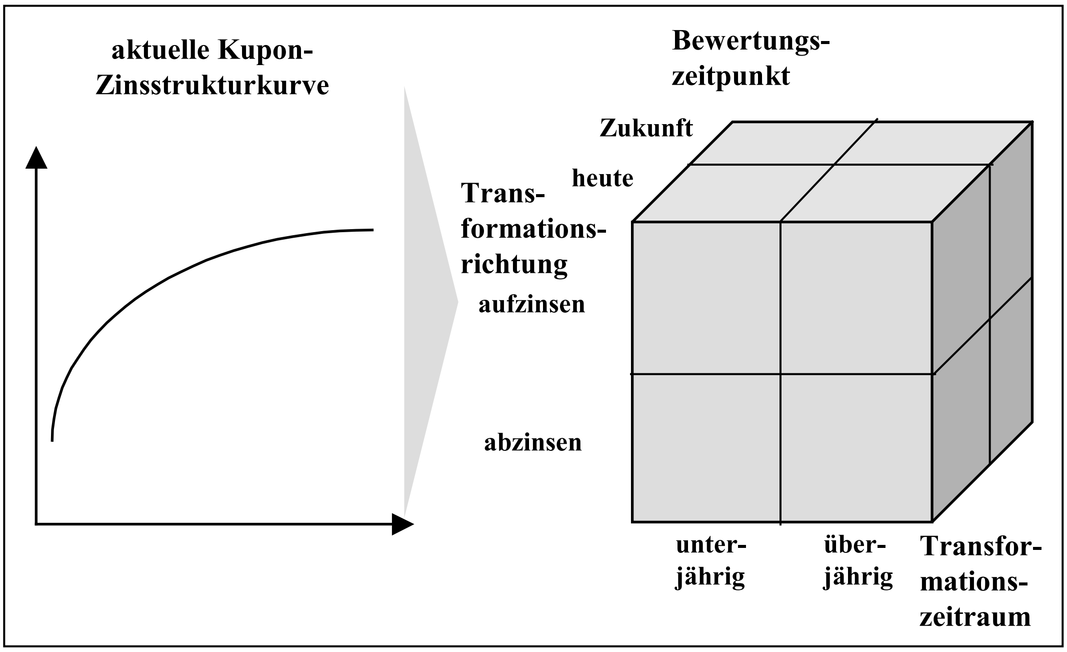


Abb. 6: Kalkulationszinswürfel

Hinsichtlich des **Bewertungszeitpunkts** kann zwischen der Bewertung heute oder in der Zukunft unterschieden werden. Die **Transformationsrichtung** gibt an, ob die jeweilige Zahlung auf- oder abgezinst werden soll. Der **Transformationszeitraum** kann sowohl überjährig als auch unterjährig sein. Zunächst sei im Folgenden die Vorgehensweise dargestellt, mit der zukünftige Zahlungen in ihren heutigen Wert umgerechnet werden können.

Die zentrale Fragestellung lautet, wie viel eine Geldeinheit, die in der Zukunft anfällt, zum heutigen Zeitpunkt wert ist. Etwas umformuliert, wird nach der Höhe der Zahlung gefragt, die heute angelegt werden muss, um die gewünschte Zahlung in der Zukunft zu erhalten. Normiert man die in der Zukunft anfallenden Zahlungen auf eine Geldeinheit, lässt sich mit Hilfe der so generierten Zahlungsstrom-Transformatoren der heutige Wert einer zukünftigen Zahlung in beliebiger Höhe durch einfache Multiplikation mit dem zugehörigen Zahlungsstrom-Transformator ermitteln.

Begonnen sei mit dem **einjährigen Zerobond-Abzinsfaktor.** Die Notation der Zerobond-Abzinsfaktoren bzw. der Zahlungsstrom-Transformatoren allgemein lautet **ZB-AF (t,LZ)**, wobei zuerst mit t der Bewertungszeitpunkt (hier t=0) und anschliessend mit LZ die Laufzeit (hier 1 Jahr) angegeben wird. Benötigt wird der 1-Jahreszins aus der aktuellen Zinsstrukturkurve. Angenommen, der 1-jährige Zins liegt bei 5 %, dann errechnet sich der 1-jährige Zerobond-Abzinsfaktor ZB-AF (0,1) wie folgt:

$$x \cdot (1 + 0{,}05) = 1$$

➔ $$x = \frac{1}{1{,}05} = \mathbf{0{,}9524}$$

mit: x = 1-jähriger Zerobond-Abzinsfaktor

bzw. allgemein:

$$x \cdot (1 + i) = 1$$

➔ $$x = \frac{1}{(1 + i)}$$ i = 1-jähriger Zinssatz

Werden heute 0,9524 EUR zu einem Zinssatz von 5 % für ein Jahr angelegt, erhält man nach einem Jahr 0,9524 EUR sowie die Zinszahlung von 0,0476 EUR, also in der Summe genau 1 EUR bzw. die eine Geldeinheit, die in einem Jahr generiert werden sollte, zurück.

Entsprechend der Vorgehensweise bei der Berechnung des 1-jährigen Zerobond-Abzinsfaktors lässt sich auch der **2-jährige Zerobond-Abzinsfaktor** bestimmen (vgl. Abb. 7). Der 1-jährige Zins liegt in diesem Beispiel erneut bei 5 % und der 2-jährige bei 6 %.

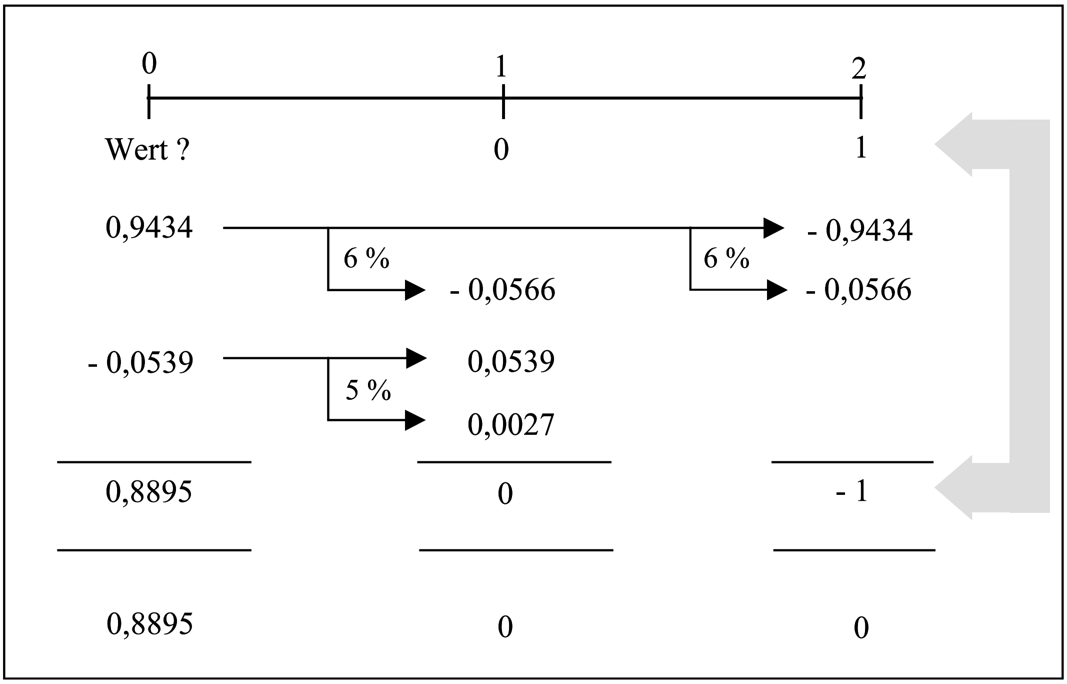


Abb. 7: Berechnung des ZB-AF (0,2)

Gesucht wird eine heutige Geldanlage, welche in 2 Jahren exakt eine Geldeinheit oder 1 EUR generiert, ohne dass zwischenzeitliche Zinszahlungen anfallen (Zerobond). Eine Anlage von 0,9434 EUR zum heutigen Zeitpunkt führt in 2 Jahren zu einer Auszahlung in Höhe von 1 EUR.

Zusätzlich fällt allerdings nach einem Jahr eine Zinszahlung in Höhe von 0,0566 EUR an. Um diese Zahlung auszugleichen, ist zum heutigen Zeitpunkt eine Geldaufnahme in Höhe von 0,0539 EUR nötig. Diese führt im Zeitpunkt t=1 zu einer Rückzahlung von 0,0566 EUR, welche genau der Zinszahlung der 2-jährigen Geldanlage in t=1 entspricht.

Damit ergeben sich in der Summe nur noch im Zeitpunkt t=2 und im Zeitpunkt t=0 Differenzen. In t=2 wird genau der 1 EUR generiert und dafür wird in der Summe aus Geldanlage und Geldaufnahme ein Gesamtbetrag in Höhe von 0,8895 EUR im heutigen Zeitpunkt benötigt. Dieser Wert entspricht dem gesuchten ZB-AF (0,2).

Angenommen, der 3-jährige Zins liegt bei 7 %, dann lässt sich aus der Zinsstruktur von 5 %, 6 % und 7 % der **3-jährige Zerobond-Abzinsfaktor** generieren (vgl. Abb. 8).

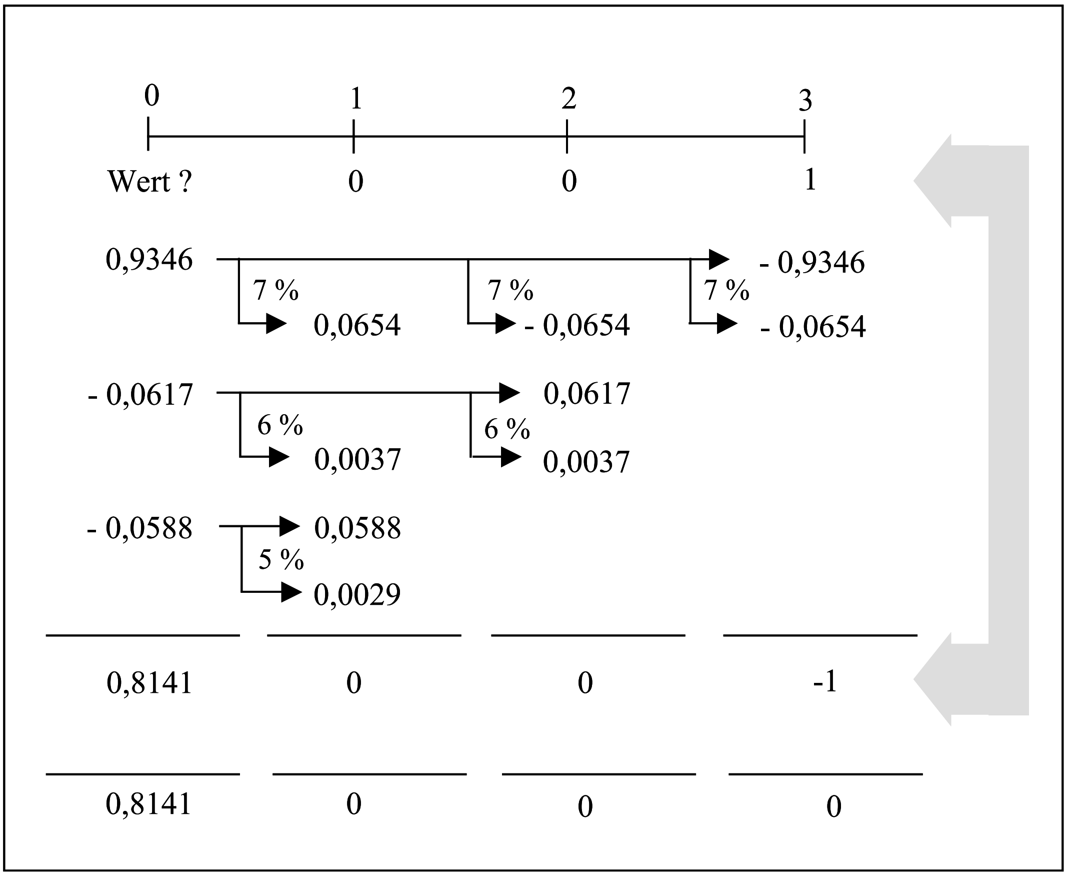


Abb. 8: Berechnung des ZB-AF (0,3)

Die Vorgehensweise entspricht der bei der Ermittlung des 2-jährigen ZB-AF gezeigten, nur dass nunmehr weitere Geldaufnahmen zum Ausgleich der anfallenden Zinszahlungen notwendig sind (vgl. ausführlich SCHIERENBECK/WIEDEMANN 1996, S. 18 f.).

Neben Zerobond-Abzinsfaktoren für ganze Jahre lassen sich auch **unterjährige ZB-AF** aus der aktuellen Zinsstrukturkurve ableiten (vgl. SCHIERENBECK/WIEDEMANN 1996, S. 15). Die Vorgehensweise wird an einem Beispiel veranschaulicht, indem in 90 Tagen, also nach 3 Monaten, eine Zahlung in Höhe von einer Geldeinheit oder 1 EUR anfällt. Gesucht ist der heutige Wert der Zahlung in drei Monaten.

Der aktuelle 3-Monats-Zins am Geldmarkt liegt bei 4,32 %. Als Abrechnungsusance wird 30/360 unterstellt. Da sich die genannte Zinsangabe, wie alle anderen Zinssätze auch, auf eine Anlagedauer von einem ganzen Jahr bezieht, ist der Zins zuerst auf die tatsächliche Laufzeit umzurechnen. Für eine Laufzeit von 3 Monaten erhält man lediglich Zinsen in Höhe von 1,08 %:

$$4{,}32 \cdot \frac{90}{360} = 1{,}08\ \%$$

Um nach 3 Monaten eine Zahlung von 1 EUR zu generieren, ist heute eine Geldaufnahme in Höhe von 0,9893 Euro notwendig:

$$\frac{1}{(1+0{,}0108)} = 0{,}9893$$

Aus diesem Beispiel lässt sich auch die allgemeine Vorschrift zur Berechnung von Zerobond-Abzinsfaktoren beliebiger unterjähriger Laufzeiten ableiten:

$$\text{ZB-AF}\ (0,\text{LZ}) = \frac{1}{1 + i \cdot \frac{\text{LZ}}{\text{Basis}}}$$

Mit: ZB-AF = Zerobond-Abzinsfaktor
i = Kupon-Zinssatz
LZ = Laufzeit, über die diskontiert werden soll (1-365 Tage)
Basis = 360 oder 365 Tage

Mit Hilfe der bisher gezeigten Zerobond-Abzinsfaktoren lassen sich beliebige Geldbeträge, die in der Zukunft anfallen, auf den heutigen Zeitpunkt diskontieren. Auf den heutigen Zeitpunkt (t=0) zu diskontieren, ist aber nur eine von vielen Möglichkeiten.

Deutlich erweitern lässt sich der Anwendungsbereich, wenn auch Zerobond-Abzinsfaktoren mit einem **Bewertungszeitpunkt in der Zukunft** errechnet werden. Die Vorgehensweise sei am Beispiel der Kalkulation des ZB-AF (1,2) dargestellt (vgl. Abb. 9).

	0	1	2	3
(1) gesucht:	0	ZB-AF (1,2)	0	-1
(2) bekannt: ZB-AF (0,3)	0,8141	0	0	- 1
(3) bekannt: ZB-AF (0,1)	0,9524	-1	0	0
(4) Kombination von (2) und (3) zur Neutralisierung der Zahlung in t = 0	0	$\frac{0{,}8141}{0{,}9524}$	0	-1
$=(2)-\frac{ZB-AF(0{,}3)}{ZB-AF(0{,}1)}\cdot(3)$		= 0,8548		

Abb. 9: Kalkulation des ZB-AF (1,2)

Der gesuchte Zerobond-Abzinsfaktor transformiert eine Zahlung, die in drei Jahren anfällt, auf den Zeitpunkt in einem Jahr. Zur Ermittlung des ZB-AF (1,2) wird die Zahlung in t=3 zunächst mit dem bekannten ZB-AF (0,3) auf den Zeitpunkt t=0 diskontiert. Bekannt ist außerdem, dass eine Zahlung in Höhe von 1 EUR, die in einem Jahr anfällt, heute 0,9524 EUR wert ist. Dividiert man die beiden bekannten Zerobond-Abzinsfaktoren, resultiert daraus der gesuchte ZB-AF (1,2).

Allgemein lassen sich zukünftige Zerobond-Abzinsfaktoren aus den schon bekannten Zerobond-Abzinsfaktoren mit Bewertungszeitpunkt t=0 ableiten. Die Formel dafür lautet:

$$ZB-AF(t,LZ)=\frac{ZB-AF(0,t+LZ)}{ZB-AF(0,t)}$$

Nach dieser Formel lassen sich sämtliche **zukünftigen Zerobond-Abzinsfaktoren** berechnen, die für eine Zinsstruktur mit einem 1-Jahreszins von 5 %, einem 2-Jahreszins von 6 %, einem 3-Jahreszins von 7 %, einem 4-Jahreszins von 8 % und einem 5-Jahreszins von 9 % in Abb. 10 dargestellt sind.

Laufzeit (LZ) / Beginn (t)	1	2	3	4	5
0	0,9524	0,8895	0,8141	0,7292	0,6379
1	0,9340	0,8548	0,7656	0,6698	
2	0,9152	0,8198	0,7172		
3	0,8957	0,7836			
4	0,8748				

Abb. 10: Zerobond-Abzinsfaktoren ZB-AF (t,LZ)

1.2.2 Zerobond-Aufzinsfaktoren

Im Gegensatz zu den Zerobond-Abzinsfaktoren ist es mit Hilfe der **Zerobond-Aufzinsfaktoren (ZB-UF)** möglich, beliebige Geldbeträge vom Betrachtungszeitpunkt heute in die Zukunft zu transformieren (vgl. SCHIERENBECK/WIEDEMANN 1996, S. 21 ff.).

Beispielsweise sei gefragt, wie viel eine Geldeinheit bzw. 1 EUR heute in einem Jahr wert ist, wenn der aktuelle 1-jährige Geldmarktzins bei 5 % liegt. Nach Ablauf eines Jahres erhält man für eine Geldanlage in Höhe von 1 EUR inklusive der Zinsen einen Betrag von 1,05 EUR. Diese 1,05 entsprechen genau dem 1-jährigen Zerobond-Aufzinsfaktor. Mit dessen Hilfe kann jeder beliebige Betrag von heute auf den Zeitpunkt t=1 durch einfache Multiplikation transformiert werden.

Nachdem die Kalkulation von Zerobond-Abzinsfaktoren ausführlich behandelt wurde, sei auf eine detaillierte Berechnung der Zerobond-Aufzinsfaktoren verzichtet, da zwischen diesen beiden Faktoren ein direkter Zusammenhang besteht (vgl. Abb. 11).

Ziel Aufzinsen aktueller Zahlungen auf zukünftige Zeitpunkte

Berechnung $ZB - UF = \frac{1}{ZB - AF}$

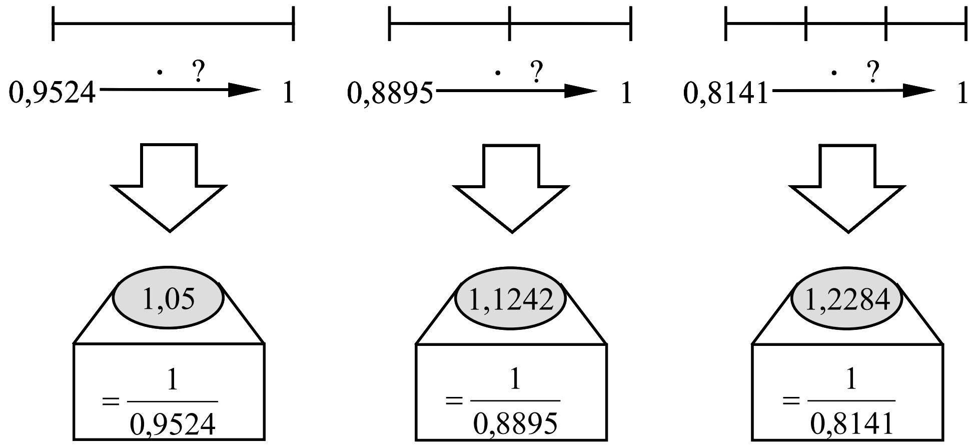


Abb. 11: Zusammenhang von Zerobond-Auf- und -Abzinsfaktoren

Sowohl Zerobond-Abzinsfaktoren als auch Zerobond-Aufzinsfaktoren generieren aus einer Zahlung zu einem bestimmten Zeitpunkt den Wert der Zahlung zu einem anderen Zeitpunkt, ohne dass zwischenzeitliche Zinszahlungen anfallen. Diese gehen in die Berechnung der Zahlungsstrom-Transformatoren unmittelbar mit ein.

Auch bei den Zerobond-Aufzinsfaktoren lassen sich nicht nur diejenigen mit Bewertungszeitpunkt heute, sondern, in Analogie zu den Zerobond-Abzinsfaktoren auch solche, die in der Zukunft beginnen, berechnen. Für die Kalkulation der zukünftigen Zerobond-Aufzinsfaktoren werden die schon bekannten Zerobond-Aufzinsfaktoren mit Bewertungszeitpunkt t=0 benötigt. Abb. 12 zeigt grafisch, wie die **zukünftigen ZB-UF** aus den bereits bekannten generiert werden können.

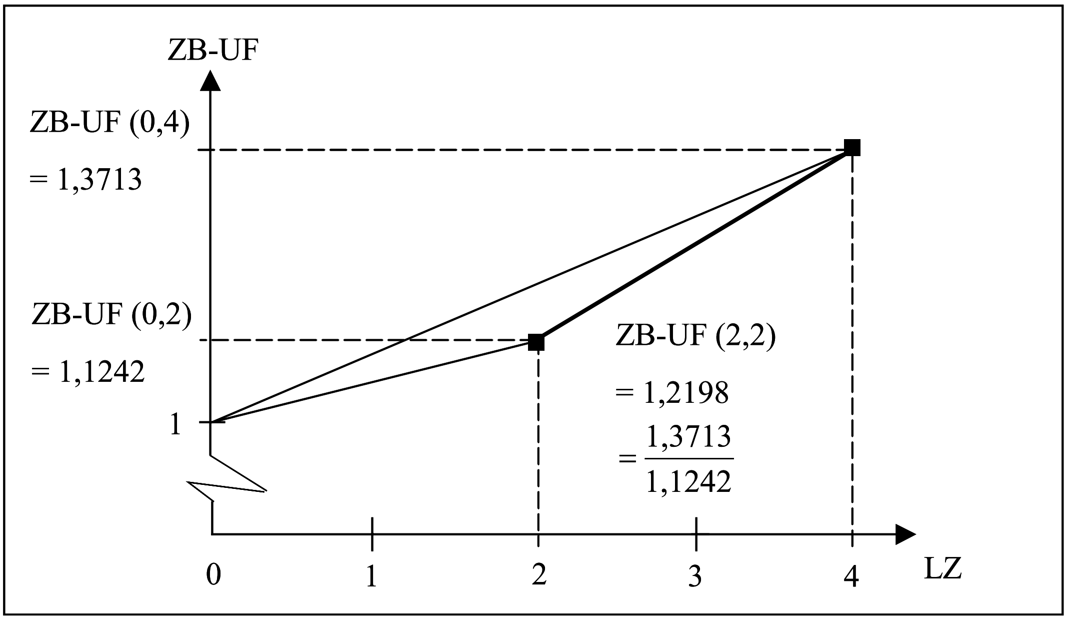


Abb. 12: Grafische Ableitung zukünftiger Zerobond-Aufzinsfaktoren

Auch hierbei errechnet sich der zukünftige ZB-UF durch die Division von zwei ZB-UF mit dem Bewertungszeitpunkt t=0:

$$\mathrm{ZB-UF}(t, LZ) = \frac{\mathrm{ZB-UF}(0, t+LZ)}{\mathrm{ZB-UF}(0, t)}$$

Auch die Zerobond-Aufzinsfaktoren lassen sich für beliebige Bewertungszeitpunkte und Laufzeiten berechnen (vgl. Abb. 13). Zugrundegelegt ist wieder die bereits bekannte Zinsstrukturkurve von 5 %, 6 %, 7 %, 8 % und 9 %.

Laufzeit (LZ) Beginn (t)	1	2	3	4	5
0	1,0500	1,1242	1,2284	1,3713	1,5676
1	1,0707	1,1699	1,3061	1,4929	
2	1,0926	1,2198	1,3943		
3	1,1169	1,2761			
4	1,1431				

Abb. 13: Zerobond-Aufzinsfaktoren ZB-UF (t, LZ)

1.2.3 Nullkuponzinssätze

Bisher wurden aus der aktuellen Kupon-Zinsstrukturkurve die Abzinsfaktoren und Aufzinsfaktoren berechnet. Nunmehr soll dargestellt werden, wie aus den aktuellen Kuponzinsen direkt **Nullkuponzinssätze** (z) berechnet werden können. Diese geben an, welcher Betrag inklusive Zinseszinsen am Ende der Laufzeit generiert wird. Bei Kuponzinssätzen werden jährlich Zinsen gezahlt. Bei Nullkuponzinssätzen fallen die gesamten Zinsen erst **am Ende der Laufzeit** an.

Lediglich bei Laufzeiten von einem Jahr oder weniger sind Kupon- und Nullkuponzinssätze identisch. Bei allen längeren Laufzeiten differieren sie auf Grund der bei den Kuponzinsen zwischenzeitlich anfallenden Zinszahlungen. Nullkuponzinssätze transformieren ebenso wie die Zerobond-Aufzinsfaktoren Geldbeträge vom jeweiligen Betrachtungszeitpunkt auf einen Zeitpunkt in der Zukunft. Es besteht somit ein direkter Zusammenhang zwischen den Zerobond-Aufzinsfaktoren und den Nullkuponzinssätzen (vgl. Abb. 14).

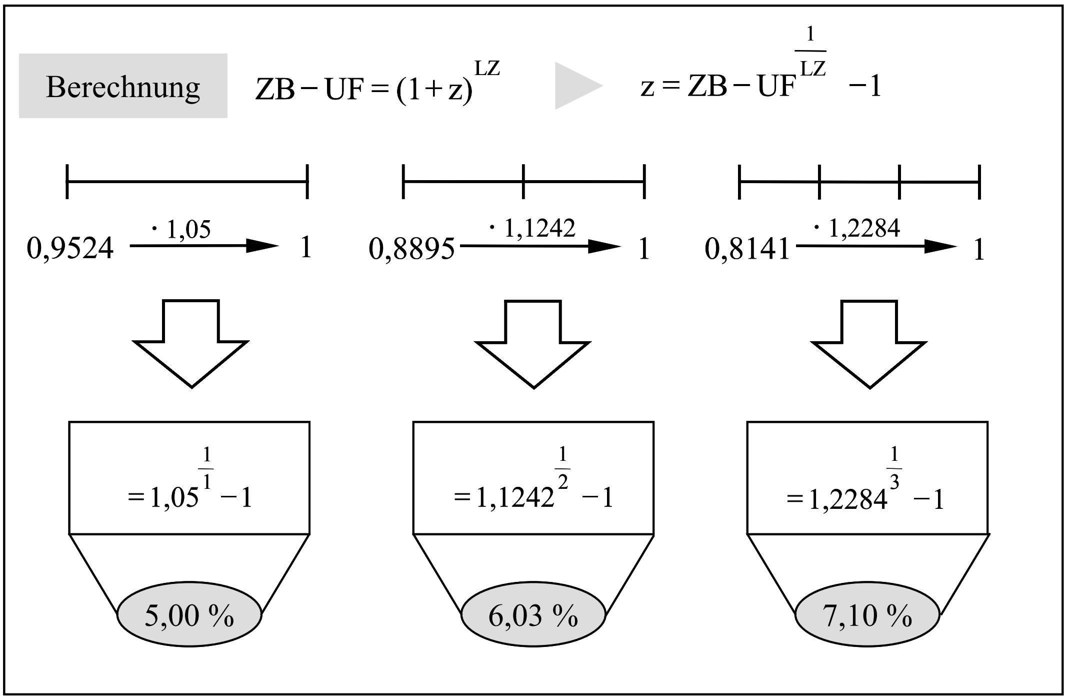


Abb. 14: Zusammenhang von Zerobond-Aufzinsfaktoren und Nullkuponzinssätzen

Ein Beispiel soll die Berechnung von Nullkuponzinssätzen aus den Zerobond-Aufzinsfaktoren weiter veranschaulichen. Der 4-jährige Zerobond-Aufzinsfaktor liegt bei 1,3713. Gesucht ist der Nullkuponzinssatz z (0,4).

1. $ZB - UF(0{,}4) = (1+z)^4$

2. $1{,}3713 = (1+z)^4$

3. $1 + z = \sqrt[4]{1{,}3713}$

4. $z = 0{,}0822 = 8{,}22\%$

Ebenso, wie aus den ZB-UF die Nullkuponzinssätze mit dem Startzeitpunkt heute berechnet werden können, ist es auch bei den Nullkuponzinssätzen möglich, diejenigen mit Startzeitpunkten in der Zukunft zu kalkulieren. Abb. 15 zeigt die grafische Herleitung des Nullkuponzinssatzes mit Startzeitpunkt in einem Jahr und einer Laufzeit von 3 Jahren z (1,3).

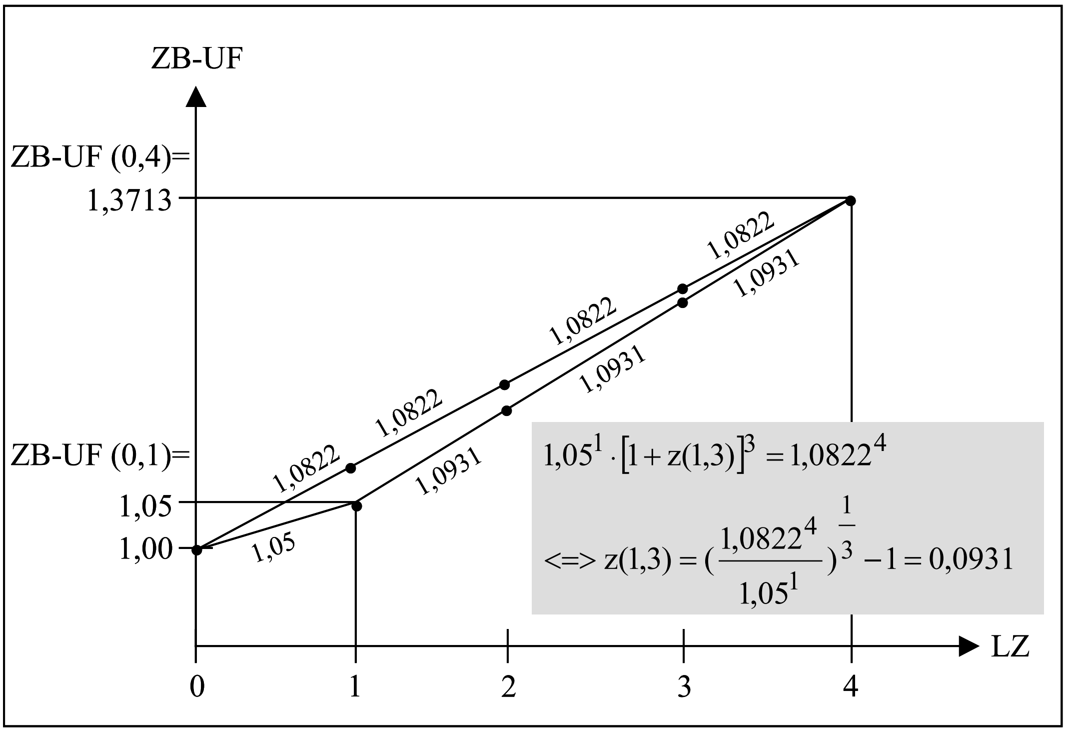


Abb. 15: Grafische Herleitung des zukünftigen Nullkuponzinssatzes z (1,3)

Analytisch berechnet sich der Nullkupon-Zinssatz z (1,3) wie folgt:

$$1{,}05^1 \cdot [1 + z(1{,}3)]^3 = 1{,}0822^4$$

$$\Leftrightarrow \qquad z(1{,}3) = \left[\frac{1{,}0822^4}{1{,}05^1}\right]^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad z(1{,}3) = 0{,}0931$$

Der Nullkuponzinssatz z (1,3) liegt demnach bei 9,31 %.

Aus den aktuellen Kuponzinssätzen lassen sich demnach nicht nur Zerobond-Ab- und -Aufzinsfaktoren berechnen, sondern auch die Nullkuponzinssätze für sämtliche Bewertungszeitpunkte und Laufzeiten (vgl. Abb. 16).

Laufzeit (LZ) Beginn (t)	1	2	3	4	5
	5,00 %	6,03 %	7,10 %	8,22 %	9,41 %
	7,07 %	8,16 %	9,31 %	10,54 %	
2	9,26 %	10,45 %	11,72 %		
3	11,64 %	12,97 %			
4	14,31 %				

Abb. 16: Nullkuponzinssätze z (t,LZ)

Die Nullkuponzinssätze liegen wie in Abb. 17 darstellt je nach Zinsstruktur auf Grund der Zinseszinsen immer über oder unter den Kuponzinssätzen. Neben der bereits bekannten normalen Zinsstrukturkurve sind auch die Nullkuponzinssätze für eine inverse Zinsstruktur berechnet.

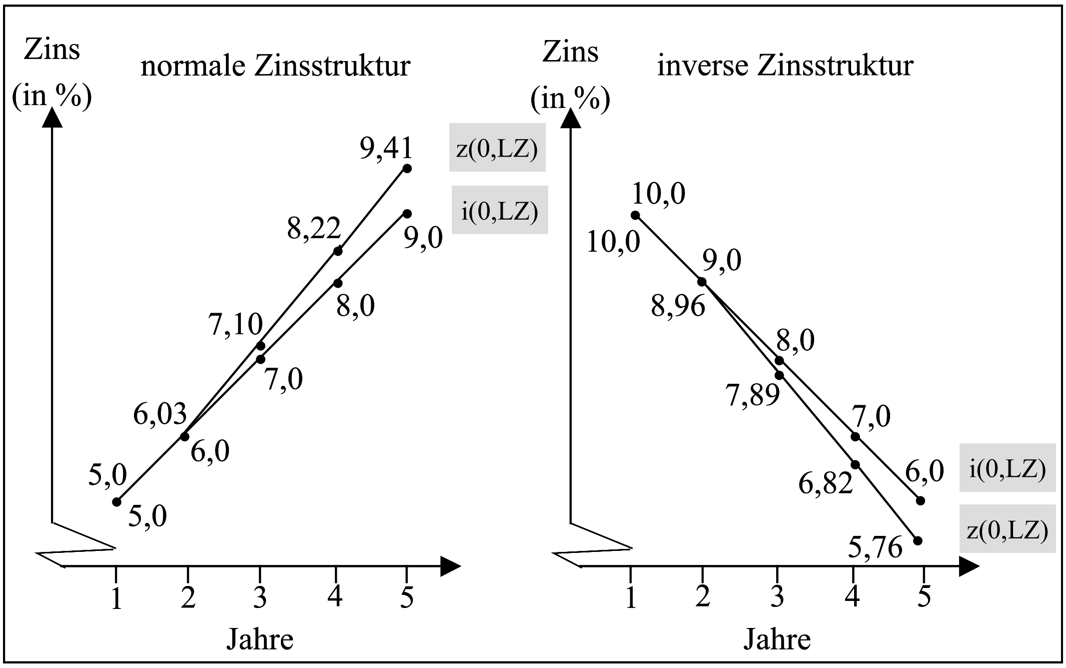


Abb. 17: Kupon- und Nullkuponzinsstrukturkurven im Vergleich

1.2.4 Forward-Zinssätze

Am Ende des letzen Kapitels wurde beschrieben, wie sich zukünftige Nullkuponzinssätze berechnen lassen. Diese werden in der Praxis, ebenso wie **zukünftige Kuponzinssätze**, als **Forward-Zinssätze**, kurz **Forwards**, bezeichnet. Dabei sind die Kupon-Forwards mit einer Laufzeit von jeweils nur einem Jahr oder weniger identisch mit den bereits oben berechneten zukünftigen Nullkuponzinssätzen. Die noch fehlenden Kupon-Forwards mit Laufzeiten über einem Jahr lassen sich mit folgender Formel berechnen (vgl. MARUSEV/PFINGSTEN 1992, S. 6):

$$i(t, LZ) = \frac{1 - ZB - AF(t, LZ)}{\sum_{n=1}^{LZ} ZB - AF(t, n)}$$

Kalkuliert man mit dieser Formel die noch fehlenden Kupon-Forwards für die bekannte normale Zinsstrukturkurve erhält man das in Abb. 18 gezeigte Ergebnis.

Laufzeit (LZ) Beginn (t)	1	2	3	4	5
0	5,00 %	6,00 %	7,00 %	8,00 %	9,00 %
1	7,07 %	8,12 %	9,17 %	10,24 %	
2	9,26 %	10,39 %	11,53 %		
3	11,64 %	12,89 %			
4	14,31 %				

Abb. 18: Kuponzinssätze und Kupon-Forwards i (t,LZ)

1.2.5 Interpolation von Zinssätzen

Bis jetzt wurden sämtliche Zinssätze mit Laufzeiten von ganzen Jahren berechnet, unabhängig davon, ob sie heute oder in der Zukunft beginnen. Noch nicht gezeigt wurde die Kalkulation von Zinssätzen mit **ungeraden Laufzeiten**, beispielsweise der Zins für eine Laufzeit von 1 ½ Jahren (1 Jahr und 6 Monate).

Den Ausgangspunkt für die Kalkulation von Zinsen mit ungeraden Laufzeiten bildet die **lineare Interpolation**. Diese sei zunächst am Beispiel der Kalkulation des Zinses mit einer Laufzeit von 1 ½ Jahren dargestellt. Der Zinssatz für diese Laufzeit muss zwischen den bekannten Zinssätzen für die Laufzeiten von einem und zwei Jahren liegen.

Bei der linearen Interpolation werden die beiden bekannten Zinssätze zunächst subtrahiert, danach durch den jeweiligen Anteil an der Laufzeit des gesuchten Zinssatzes geteilt und abschließend zum laufzeitkürzeren Zins addiert. Liegt beispielsweise der 1-jährige Kuponzinssatz bei 5 % und der 2-jährige bei 6 %, resultiert aus der linearen Interpolation folgender Kuponzinssatz für 1 ½ Jahre:

$$i_{(1+6/12)} = i_{(1)} + \left(i_{(2)} - i_{(1)}\right) \cdot \frac{6}{12} = 5 + (6-5) \cdot \frac{6}{12} = 5{,}5\%$$

bzw. allgemein für halbjährliche Zinssätze:

$$i_{(t+6/12)} = i_{(t)} + \left(i_{(t+1)} - i_{(t)}\right) \cdot \frac{6}{12}$$

Den Kuponzinssatz für ein Jahr und beispielsweise 3 Monate erhält man entsprechend aus:

$$i_{(1+3/12)} = i_{(1)} + \left(i_{(2)} - i_{(1)}\right) \cdot \frac{3}{12}$$

bzw. allgemein für Kuponzinssätze mit ungeraden Laufzeiten:

$$i_{(t+m/12)} = i_{(t)} + \left(i_{(t+1)} - i_{(t)}\right) \cdot \frac{m}{12},$$

wobei m den jeweiligen Monaten des ungeraden Jahres entspricht.

Einzig bei der Berechnung von Zinsen im unterjährigen Bereich entstehen bei der vorgestellten Methode Probleme. Als Zeitpunkt t müsste gemäß den obigen Formeln der Zins für 0 Monate als Kalkulationsgrundlage für die Interpolation zugrunde gelegt werden. Dieser ist allerdings grundsätzlich 0. Bei der linearen Interpolation für Zinsen im unterjährigen Bereich wird deshalb als Zins für den Zeitpunkt t nicht der 0-Monatszins, sondern der 1-Monatszins unterstellt und mit diesem kalkuliert.

1.2.6 Kalkulatorische Dreiecksbeziehung

Alle bisher dargestellten Kalkulationsgrößen lassen sich auf Basis der aktuellen Kupon-Zinsstrukturkurve berechnen. Zunächst werden dabei die Zerobond-Ab- und -Aufzinsfaktoren sowie die Nullkuponzinssätze für den heutigen Zeitpunkt mit den verschiedenen Laufzeiten berechnet und daraus die zukünftigen Zerobond-Ab- bzw. -Aufzinsfaktoren, die Nullkupon- und die Forward-Zinssätze generiert. Wie die verschiedenen Kalkulationsgrößen zusammenhängen zeigt Abb. 19.

Aktuelle Kupon-Zinssätze i(0,LZ)					
LZ	1	2	3	4	5
i (0,LZ)	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %

ZB-AF (t,LZ)					
	1	2	3	4	5
0	0,9524	0,8895	0,8141	0,7292	0,6379
1	0,9340	0,8548	0,7656	0,6698	
2	0,9152	0,8198	0,7172		
3	0,8957	0,7836			
4	0,8748				

ZB-UF (t,LZ)					
	1	2	3	4	5
0	1,0500	1,1242	1,2284	1,3713	1,5676
1	1,0707	1,1699	1,3061	1,4929	
2	1,0926	1,2198	1,3943		
3	1,1169	1,2761			
4	1,1431				

Beispiel

$$0{,}7656 \cdot 1{,}3061 = 1$$

$$0{,}7656 \cdot (1 + 0{,}0931)^3 = 1$$

z (t,LZ)					
	1	2	3	4	5
0	5,00 %	6,03 %	7,10 %	8,22 %	9,41 %
1	7,07 %	8,16 %	9,31 %	10,54 %	
2	9,26 %	10,45 %	11,72 %		
3	11,64 %	12,97 %			
4	14,31 %				

Abb. 19: Kalkulatorische Dreiecksbeziehung

Anhand der Kalkulationsgrößen mit Beginn in einem Jahr (t=1) und einer Laufzeit von 3 Jahren (LZ = 3) wird der Zusammenhang deutlich:

$$\text{ZB-AF}(1{,}3) \cdot \text{ZB-UF}(1{,}3) = 1$$

$$0{,}7656 \cdot 1{,}3061 = 1$$

oder:

$$\text{ZB-AF}(1{,}3) \cdot (1 + z(1{,}3))^3 = 1$$

$$0{,}7656 \cdot (1 + 0{,}0931)^3 = 1$$

Als EXCEL-Tool zur Berechnung der vorgestellten Zahlungsstrom-Transformatoren steht im Download-Bereich von www.zinsrisiko.de der ZB-Master 1.0 zur Verfügung.

1.3 Barwertberechnung

1.3.1 Barwertberechnung bei flacher Zinsstrukturkurve

Der **Barwert** eines Finanzinstrumentes oder allgemein einer Zahlung ist immer dessen Wert im Bewertungszeitpunkt heute (t=0). Anhand eines einheitlichen Beispiels werden im Folgenden die verschiedenen Methoden zur Barwertermittlung dargestellt und verglichen.

Das Beispiel generiert Auszahlungen in Höhe von 50.000 EUR in einem und in zwei Jahren sowie eine weitere Zahlung in Höhe von 1.050.000 EUR in drei Jahren. Unterstellt sei zunächst eine **flache Zinsstrukturkurve** mit einem einheitlichen Zinssatz von 7 %. Die Berechnung des Barwertes zeigt Abb. 20.

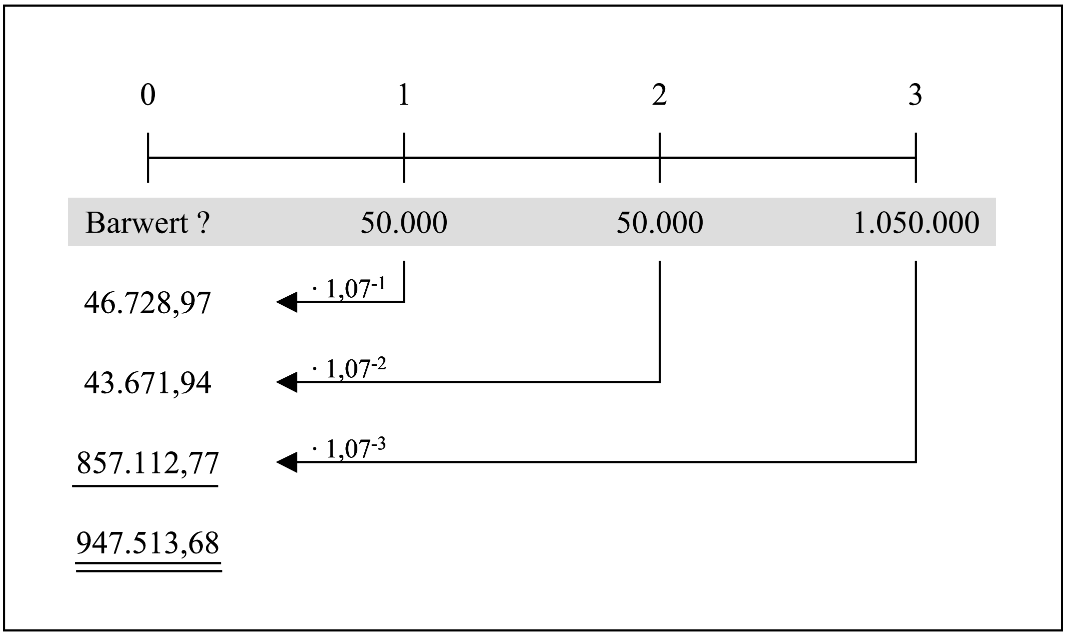


Abb. 20: Barwertbestimmung bei einheitlichem Zins

Bei einem einheitlichen Zinssatz von 7 % ergibt sich ein Barwert des zukünftigen Zahlungsstromes in Höhe von 947.513,68 EUR. Dieser Barwert fasst die drei zukünftigen Zahlungen in einem Wert im Bewertungszeitpunkt t=0 zusammen.

Angenommen, der einheitliche Zinssatz liegt nicht bei 7 %, sondern bei 8 %. Dann würde sich ein Barwert in Höhe von 922.687,09 EUR ergeben. Im Vergleich zum Barwert bei 7 % ist der Barwert bei einem höheren Zins um

24.826,59 EUR gesunken. Bei einem niedrigeren Zinssatz, beispielsweise 6 %, ergibt sich aus den drei Zahlungen ein Barwert von 973.269,88 EUR. Gegenüber dem Zinssatz von 7 % ist der Barwert hier um 25.756,20 EUR gestiegen.

Aus den Beispielen wird die Abhängigkeit des Barwerts vom unterstellten Zinssatz deutlich. Je höher der Zins, desto geringer ist der Barwert resp. je niedriger der unterstellte Zinssatz, desto höher ist der Barwert des Zahlungsstromes. Dabei zeigt das Beispiel auch, dass die Wirkung eines um 1 Prozent höheren Zinses auf den Barwert nicht die gleiche ist wie bei einem um 1 Prozent niedrigeren Zins.

Neben der ohnehin unrealistischen Prämisse einer flachen Zinsstrukturkurve sind bei der Barwertermittlung mit einem einheitlichen Zins noch weitere unrealistische implizite Prämissen verbunden (vgl. SCHIERENBECK/WIEDEMANN 1996, S. 6 f.).

- Der Zins in einem Jahr ist exakt derselbe wie zum heutigen Zeitpunkt, d.h. Geldanlagen in einem Jahr sind erneut zu 7 % möglich.

- Der Zins aller weiteren Jahre ist auch exakt derselbe wie zum heutigen Zeitpunkt, d.h. auch Geldanlagen in zwei oder drei Jahren etc. sind ebenfalls zu 7 % möglich.

In der Realität liegen nicht nur nicht-flache Zinsstrukturkurven vor, sondern die Zinssätze schwanken auch. Auf Grund dessen wird im folgenden Kapitel die Barwertberechnung auf Basis von nicht-flachen Zinsstrukturkurven dargestellt.

1.3.2 Barwertberechnung durch Duplizierung

Ausgangspunkt für dieses Kapitel ist der bereits bekannte Zahlungsstrom. Hinzu kommt eine nicht-flache Zinsstrukturkurve mit einem 1-Jahreszins von 5 %, einem 2-Jahreszins von 6 % und einem 3-Jahreszins von 7 %. Bei einer horizontalen Zinsstrukturkurve mit einem einheitlichen Zinssatz von 7 % konnte der Barwert durch einfaches Abzinsen mit den Faktoren $1{,}07^{-1}$, $1{,}07^{-2}$ und $1{,}07^{-3}$ berechnet werden.

Übernimmt man diese Rechentechnik und tauscht lediglich die flache gegen die nicht-flache Zinsstrukturkurve mit den Zinsätzen 5 %, 6 % und 7 % aus, dann ergibt sich ein neuer Barwert von 949.231,64 EUR (vgl. Abb. 21).

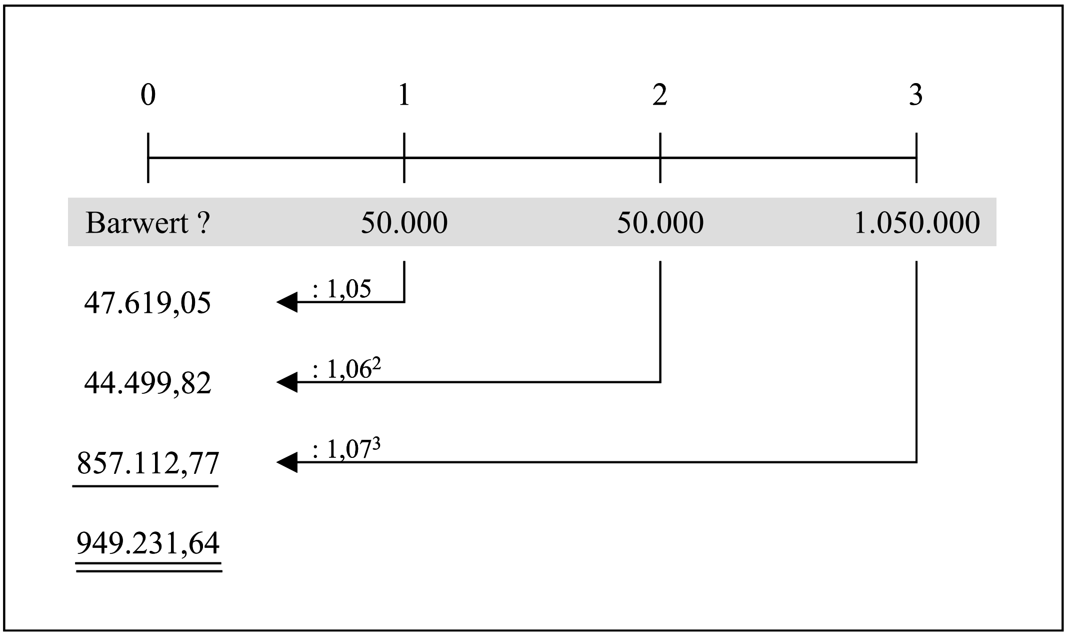


Abb. 21: Falsche Barwertermittlung bei nicht-flacher Zinsstrukturkurve

Allerdings ist auch diese Vorgehensweise finanzmathematisch noch nicht korrekt, da ebenfalls eine Reihe von – unrealistischen – Prämissen gesetzt werden:

1. Die Finanzierung der Zinsen des 2-jährigen Papiers ist in einem Jahr zu 6 % für ein Jahr möglich,

2. die Finanzierung der Zinsen des 3-jährigen Papiers ist in einem Jahr zu 7 % für 2 Jahre möglich und

3. die Finanzierung von Zinsen und Zinseszinsen des 3-jährigen Papiers ist in 2 Jahren zu 7 % für ein Jahr möglich.

In Abb. 22 sind die Prämissen der falschen Barwertermittlung ausführlich dargestellt (vgl. SCHIERENBECK/WIEDEMANN 1996, S. 7 f.). Nur wenn in der Zukunft die angenommenen Zinssätze tatsächlich eintreten würden, wäre der ermittelte Barwert korrekt. Damit ist diese Art der Barwertberechnung mit einer Zinsprognose verbunden, die aber der Anwender nicht frei gestalten, sondern die ihm vom Rechenalgorithmus aufgezwungen wird. Bewertungsfragen sollten aber grundsätzlich prognosefrei gelöst werden.

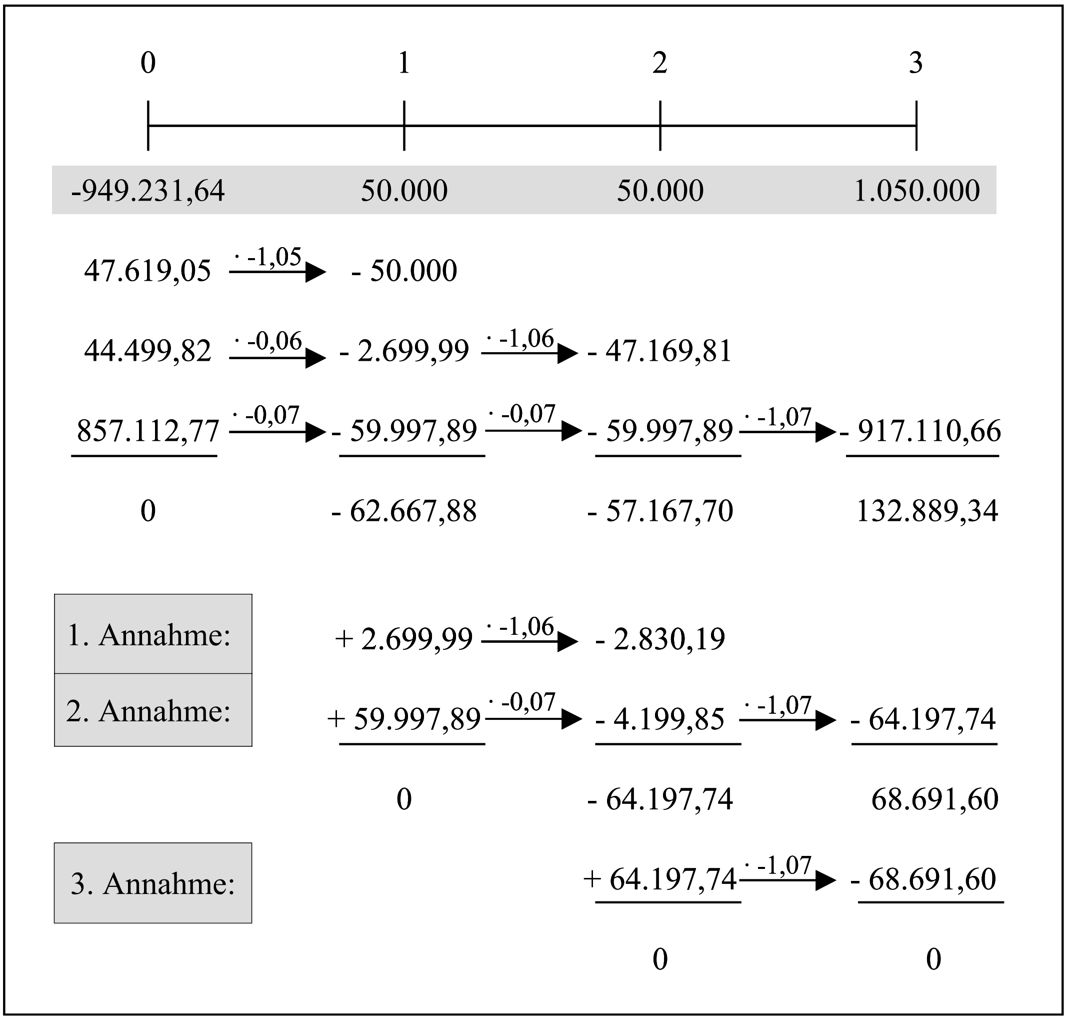


Abb. 22: Implizite Prämissen der falschen Barwertermittlung

Die Berechnung des **„echten“ Barwertes** gelingt nur mittels **konsequenter Duplizierung des Zahlungsstromes** durch Gegengeschäfte am Geld- und Kapitalmarkt. Diese basiert ebenfalls auf der aktuellen im Bewertungszeitpunkt gültigen Zinsstrukturkurve, aber eben nur auf dieser. Eine explizite Zinsprognose ist nicht erforderlich. Abb. 23 zeigt die korrekte Berechnung des Barwertes durch Duplizierung.

Die Duplizierung erfolgt mit Geld- und Kapitalmarktgeschäften bei denen jährlich Zinsen gezahlt und die endfällig getilgt werden. Wegen der zwischenzeitlichen Zinszahlungen wird immer mit der laufzeitlängsten Zahlung begonnen.

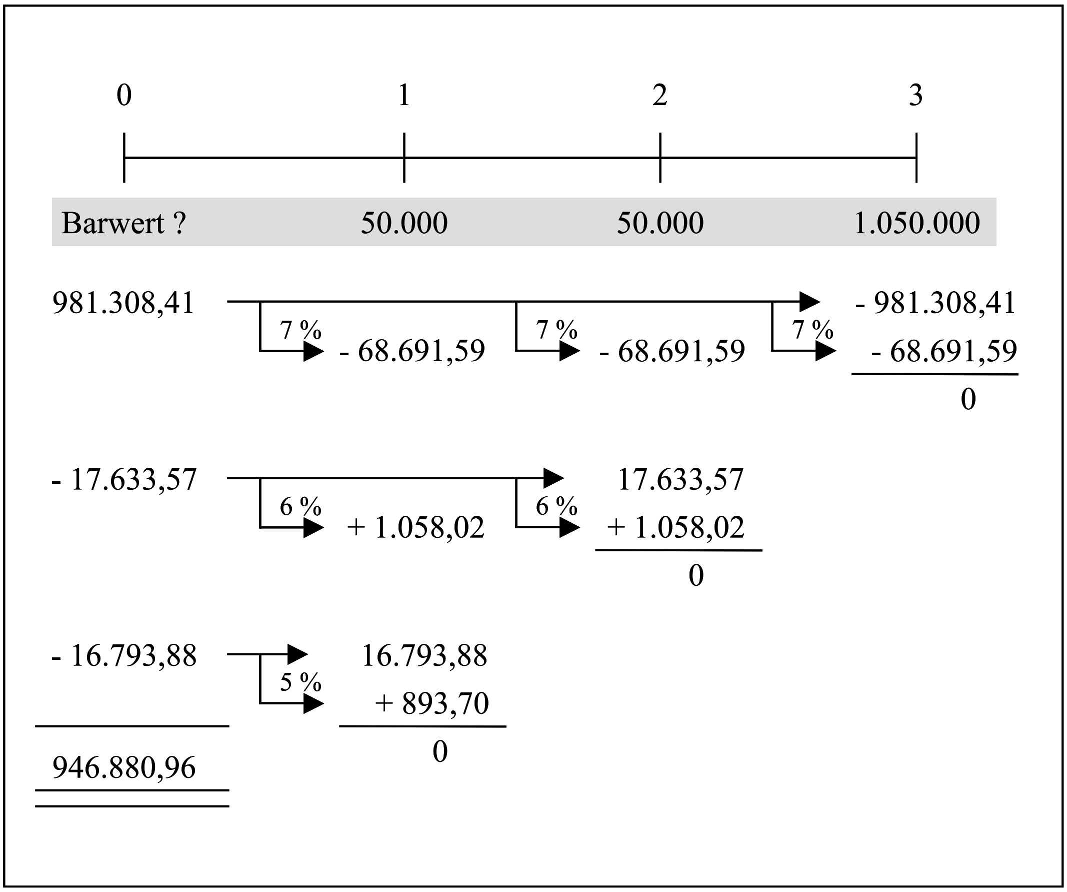


Abb. 23: Berechnung des Barwerts durch Duplizierung des Zahlungsstroms

Um die Zahlung im dritten Jahr in Höhe von 1.050.000 EUR auszugleichen, ist eine 3-jährige Geldaufnahme zu 7 % in Höhe von 981.308,41 EUR erforderlich. Diese führt zu jährlichen Zinszahlungen im 1. und 2. Jahr von 68.691,59 EUR und zu einer Zins- und Tilgungszahlung im dritten Jahr von insgesamt 1.050.000 EUR.

Als nächstes ist die Zahlung im 2. Jahr zu duplizieren. Aus dem Ursprungszahlungsstrom bestehen im 2. Jahr 50.000 EUR. Hinzu kommt die Zinszahlung der 3-jährigen Geldaufnahme. Insgesamt ist im 2. Jahr demnach ein Cash Flow in Höhe von -18.691,59 EUR zu duplizieren. Dieser kann durch eine 2-jährige Geldanlage zu 6 % in Höhe von 17.633,57 EUR neutralisiert werden. Damit verbleibt eine Zahlungsdifferenz im 1. Jahr von + 50.000 – 68.691,59 + 1.058,02 = 17.633,57 EUR, die durch eine 1-jährige Geldanlage zu 5 % in Höhe von 16.793,88 EUR dupliziert wird.

Der durch Duplizierung ermittelte richtige Barwert in Höhe von 946.880,96 EUR liegt demnach um 2.350,68 EUR unter dem vorher falsch berechneten.

1.3.3 Barwertberechnung mit Hilfe von Zerobond-Abzinsfaktoren

Durch die konsequente Duplizierung des Zahlungsstroms lässt sich der Barwert korrekt ermitteln. Eine alternative Rechentechnik bietet der Ansatz der **Zerobond-Abzinsfaktoren**. Statt einer unmittelbaren Diskontierung des zu bewertenden Zahlungsstroms kann auch zweistufig vorgegangen werden. Zuerst werden auf Basis der jeweiligen Zinsstrukturkurve die zugehörigen Zahlungsstrom-Transformatoren (hier Zerobond-Abzinsfaktoren) berechnet, die in normierter Form den heutigen Wert einer Geldeinheit in der Zukunft wiedergeben.

Die Zerobond-Abzinsfaktoren behalten solange ihre Gültigkeit, wie sich die Marktzinsen nicht ändern. Kennt man die Zerobond-Abzinsfaktoren können beliebige zukünftige Cash Flows durch einfache Multiplikation in ihren heutigen Wert transformiert werden. Bezogen auf das Beispiel sind folgende Rechenschritte zu unternehmen:

1. 1.050.000 EUR in drei Jahren multipliziert mit dem ZB-AF (0,3) von 0,8141 ergeben einen heutigen Wert von 854.787,52 EUR.

2. Die Zahlung aus t=2 hat mittels des ZB-AF (0,2) von 0,8895 einen heutigen Wert von 44.474,39 EUR.

3. Der letzte verbleibende Betrag in Höhe von 50.000 EUR in t=1 hat einen aktuellen Wert von 47.619,05 EUR (Multiplikation mit dem ZB-AF (0,1) von 0,9524).

Werden die aktuellen Werte der Zahlungen (1) bis (3) saldiert, erhält man den aktuellen Barwert in Höhe von 854.787,52 + 44.474,39 + 47.619,05 = 946.880,96 EUR.

Dasselbe Ergebnis lässt sich auch mittels der **Nullkuponzinssätze** erreichen. Die Nullkuponzinssätze für die entsprechenden Laufzeiten sowie die mit ihnen durchgeführte Kalkulation des Barwertes zeigt Abb. 24.

Laufzeit	1	2	3
Nullkupon-zinssätze	5,0000 %	6,0303 %	7,0969 %

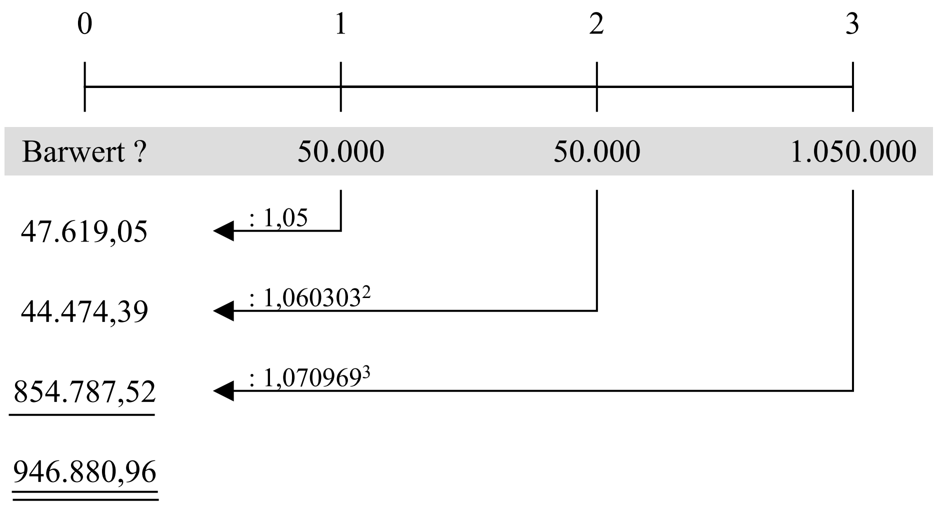


Abb. 24: Barwertberechnung mittels Nullkuponzinssätzen

Damit stehen drei alternative Wege bei der Ermittlung des Barwertes zur Verfügung, die alle drei zum finanzmathematisch richtigen Ergebnis führen.

1.4 Yield to Maturity

Die **Yield to Maturity**, wörtlich übersetzt „Ertrag bei Fälligkeit“, entspricht der Verzinsung, die für ein festverzinsliches Wertpapier gezahlt wird, wenn es bis zum Ende der Laufzeit gehalten wird und alle aus diesem Wertpapier resultierenden zwischenzeitlichen Zinszahlungen ebenfalls bis zum Ende der Laufzeit mit der gleichen Rendite angelegt werden.

Bei einer flachen Zinsstrukturkurve (Kuponzins = Nullkuponzins) würde die über alle Laufzeiten konstante Rendite die zugehörige Yield to Maturity sein. In diesem Fall werden alle aus einem Wertpapier fließenden Zahlungen mit einer konstanten Rendite abgezinst, um den aktuellen Barwert zu erhalten (vgl. Abb. 25).

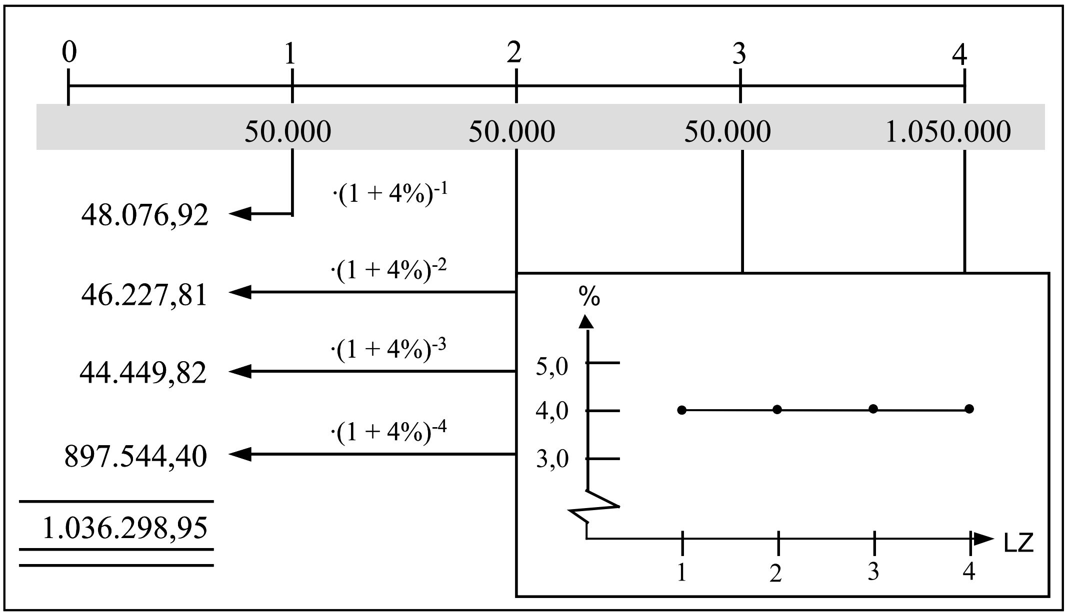


Abb. 25: Yield to Maturity bei flacher Zinsstrukturkurve

Bei einer nicht-flachen Zinsstrukturkurve wird die Yield to Maturity über numerische Iteration aus den vorliegenden Kuponzinsen resp. Nullkuponzinsen ermittelt. Das Verfahren sucht eine passende konstante Rendite (= Yield to Maturity), mit der alle aus dem Wertpapier generierten Cash Flows genau auf den aktuellen Barwert abgezinst werden können.

Für das Beispiel mögen der 1-Jahres-Kuponzins bei 4,4503 %, der 2-Jahres-Kuponzins bei 4,4645 %, der 3-Jahres-Kuponzins bei 4,5379 % und der 4-Jahres-Kuponzins bei 4,6360 % liegen (vgl. REX-Zinsen in Abb. 4). Die sich aus diesen

Zinsen ergebenden Nullkuponzinssätze sind in Abb. 26 dargestellt. Auf diese Weise wird die Yield to Maturity mit den aktuellen Kuponzinsen resp. Nullkuponzinsen in Beziehung gebracht (vgl. Abb. 26).

Laufzeit	Cash Flow	Nullkupon-zins	Barwerte
1	50.000	4,4503%	47.869,66
2	50.000	4,4649%	45.817,25
3	50.000	4,5415%	43.762,68
4	1.050.000	4,6458%	875.592,13

Cash Flow	Yield to Maturity	Barwerte
50.000	4,6353%	47.785,01
50.000	4,6353%	45.668,15
50.000	4,6353%	43.645,06
1.050.000	4,6353%	875.943,50

1.013.041,72 ⟷ **1.013.041,72**

Abb. 26: Yield to Maturity bei nicht-flacher Zinsstrukturkurve

Bei festverzinslichen Wertpapieren, die zu pari notieren, ist die Yield to Maturity identisch mit dem für die Laufzeit des Wertpapiers gültigen Kuponzins. Für die Veranschaulichung dieser Identitätseigenschaft wird der Kuponzins aus dem vorangegangenen Beispiel, der für eine 4-jährige Laufzeit auf dem Geld- und Kapitalmarkt gezahlt wird, von 4,6360 % auf 5,00 % angehoben.

Dadurch wird die im Beispiel verwendete Anleihe mit dem Kupon von 5 % zu pari notieren, unabhängig davon, wo die Marktzinsen der übrigen Laufzeiten liegen. Die zukünftigen Cash Flows der Anleihe können in diesem Fall entweder mit der Yield to Maturity (vgl. Abb. 27) oder mit den aus der Zinsstrukturkurve abgeleiteten Zerobond-Abzinsfaktoren abgezinst werden. Das Ergebnis wird immer identisch sein.

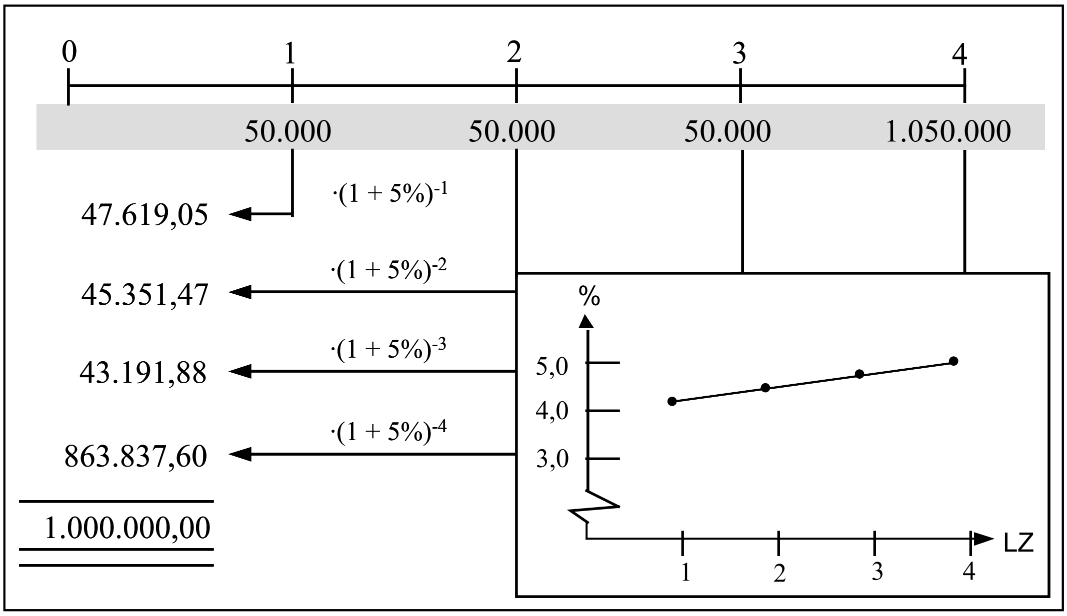


Abb. 27: Yield to Maturity bei pari-notierten Anleihen

Bei festverzinslichen Wertpapieren, die nicht zu pari notieren, gilt folgender Zusammenhang zwischen Yield to Maturity, aktuellem Kurs und Kuponzins:

- Liegt der aktuelle Kurs der Anleihe unter 100, d.h. unter pari, liegt die Yield to Maturity über dem Kuponzins der Anleihe.

- Notiert die Anleihe mit einem Kurs über 100, d.h. über pari, liegt die Yield to Maturity unter dem Kuponzins der Anleihe.

Die Begriffe seien abschließend an einem kleinen Beispiel verdeutlicht. Zugrundegelegt wird eine 1-jährige Anleihe mit einem Volumen von 100 EUR und einem Nominalzins von 5 %, der in diesem Fall auch gleichzeitig den Nullkuponzins darstellt.

Bei einem Kurs von 100 liegt die Yield to Maturity ebenfalls bei 5 %. Wäre der Kurs 98, ergäbe sich eine Yield to Maturity von 7,14 %. Bei einem Kurs von 102 liegt die Yield to Maturity bei 2,94 %.

$$\text{Kurs} = 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{105}{100} - 1 = 5{,}00\ \%$$

$$\text{Kurs} = 98 \quad \Rightarrow \quad \frac{105}{98} - 1 = 7{,}14\ \%$$

Kurs = 102 ➔ $\frac{105}{102} - 1 = 2{,}94\ \%$

Neben der aktuellen Zinsstrukturkurve und der Restlaufzeit ist die Cash Flow-Struktur des betrachteten Wertpapiers eine weitere wichtige Determinante der Yield to Maturity. Zwei Wertpapiere mit identischer Restlaufzeit, aber mit unterschiedlichen zwischenzeitlichen Zinszahlungen werden unterschiedliche Yields to Maturity aufweisen.

Um diesen Zusammenhang am Beispiel zu verdeutlichen, wird die Kuponzahlung des 4-jährigen Wertpapiers von 5 % auf 7 % angehoben (vgl. Abb. 28). Die Yield to Maturity sinkt von 4,6353 % beim Wertpapier mit 5 %-Kupon auf 4,6318 %.

Laufzeit	Cash Flow	Nullkupon-zins	Barwerte
1	70.000	4,4503%	67.017,52
2	70.000	4,4649%	64.144,16
3	70.000	4,5415%	61.267,75
4	1.070.000	4,6458%	892.270,08

Cash Flow	Yield to Maturity	Barwerte
70.000	4,6318%	66.901,28
70.000	4,6318%	63.939,74
70.000	4,6318%	61.109,30
1.070.000	4,6318%	892.749,17

1.084.699,50 ⟷ **1.084.699,50**

Abb. 28: Yield to Maturity bei geändertem Kuponzins

Das Phänomen unterschiedlicher Yields to Maturity für gleiche Restlaufzeiten wird auf dem Geld- und Kapitalmarkt nicht lange anhalten. Das Ungleichgewicht zwischen Wertpapieren gleicher Risikokategorie und gleicher Restlaufzeit löst eine verstärkte Nachfrage nach den Wertpapieren mit höherer Rendite aus. Durch die Gesetze von Angebot und Nachfrage auf dem Geld- und Kapitalmarkt dürfte sich bei liquiden Anleihen schnell für die gleiche Restlaufzeit eine einheitliche Yield to Maturity einstellen. Das führt auch dazu, dass die Kurse bei handelbaren Zinstiteln von den theoretisch ermittelten Barwerten abweichen können.

1.5 Fallstudien zu finanzmathematischen Grundlagen

1.5.1 Fallstudie 1: Berechnung von Zahlungsstrom-Transformatoren

Gegeben sind folgende Kuponzinssätze:

Jahre	1	2	3	4
Zinssatz	3,5 %	4,0 %	4,5 %	5,0 %

a) Berechnen Sie die **Zerobond-Ab-** und **-Aufzinsfaktoren** für sämtliche Laufzeiten.

b) Berechnen Sie die **Nullkuponzinssätze** für sämtliche Laufzeiten.

c) Bestimmen Sie alle aus den Kuponzinssätzen kalkulierbaren **Forward-Zinssätze**.

1.5.2 Fallstudie 2: Barwertbestimmung

Gegeben sei folgender Cash Flow einer 4-jährigen Anleihe:

Jahre	1	2	3	4
Cash Flow	65.000	65.000	65.000	1.065.000

Hinweis: Es gelten die Zinssätze aus Fallstudie 1.

a) Bestimmen Sie den **Barwert der Anleihe** durch konsequente **Duplizierung** des Cash Flow.

b) Berechnen Sie den **Barwert der Anleihe** mittels der in Fallstudie 1 ermittelten **Nullkuponzinssätze**.

c) Wie hoch ist der **Barwert** bei einer Ermittlung mit Hilfe der **Zerobond-Abzinsfaktoren**?

d) Der Emittent der Anleihe plant, den Kupon um 0,2 Prozentpunkte anzuheben. Wie verändert sich der **Barwert**?